Aufgabe 31. Ein endlicher Baum, der einen Knoten vom Grad k enthält, hat mindestens k Blätter.

Lösung. Sei $T = (V, E)$.

Variante A. Wir bezeichnen mit $\Delta(T) = \max\{\deg(v) : v \in T\}$ den *Maximalgrad* von T. Dann ist zu zeigen: Ein Baum hat zumindest $\Delta(T)$ Blätter.

Induktion nach $|V|$. Für $|V| = 1$ ist T ein isolierter Knoten. Dieser hat Grad 0, womit die Aussage trivialerweise gilt.

Sei nun $|V| \geq 2$, und die Aussage gelte für Bäume kleinerer Ordnung. Sei $v \in V$ ein Blatt und $w \in V$ der eindeutig bestimmte Nachbar von v. Dann ist $T' := T - v$ ein Baum. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1. Es ist $\Delta(T') = \Delta(T)$. Dann besitzt T' nach Induktionsvoraussetzung bereits $\Delta(T)$ Blätter. Ist w kein Blatt von T', so ist jedes Blatt von T' auch ein Blatt von T, und die Aussage ist gezeigt. Ist w ein Blatt von T', so hat T zumindest $\Delta(T) - 1$ Blätter, die von T' stammen, sowie das zusätzliche Blatt v. Also hat T in jedem Fall $\Delta(T)$ Blätter.

Fall 2. Es ist $\Delta(T') < \Delta(T)$. Da wir nur ein Blatt entfernt haben, muss gelten $\Delta(T') = \Delta(T) - 1$. Also besitzt T' nach Induktionsvoraussetzung zumindest $\Delta(T) - 1$ Blätter. Ist w kein Blatt von T, so sind wir wie vorhin fertig, weil jedes Blatt von T' dann auch ein Blatt von T ist, und T zusätzlich das Blatt v besitzt.

Ist w ein Blatt von T', so kann nur dann $\Delta(T') < \Delta(T)$ gelten wenn $\Delta(T') = 1$ ist (denn w ist der einzige Knoten, dessen Grad sich bei Entfernung von v verändert.) Dann ist T' aber der (bis auf Isomorphie einzige) Baum mit zwei Knoten, und damit ist T ein Weg der Länge 3. In diesem Fall ist T ein Weg der Länge 3 und hat T daher 2 Blätter.

Dieser Beweis funktioniert und ist naheliegend, aber nicht sehr elegant (was aber kein Fehler ist!).

Variante B. Sei $v \in V$ ein Knoten mit Grad k, und seien $w_1, \dots, w_k$ seine Nachbarn. Wir zeigen zuerst, dass $T - v$ zumindest k Komponenten besitzt: Für $i, j \in [k]$ mit $i \neq j$ gibt es in T genau einen Weg von w_i nach w_j (Satz 2.5). Dieser führt durch den Knoten v. D.h. in $T - v$ gibt es keinen Weg von w_i nach w_j, womit diese Knoten in verschiedenen Komponenten von $T - v$ liegen. Da dies für alle $i, j \in [k]$ mit $i \neq j$ gibt, liegen $w_1, \dots, w_k$ in paarweise verschiedenen Komponenten. [1]

Seien $G_1, \dots, G_l$ ($l \geq k$) die Komponenten von $T - v$. Da $T - v$ kreisfrei ist, sind $G_1, \dots\ G_l$ Bäume. Ist $|V(G_i)| = 1$, so ist G_i ein isolierter Knoten, was aber bedeutet, dass dieser Knoten ein Blatt von T ist. Ist $|V(G_i)| > 1$, so besitzt G_i zumindest zwei Blätter. Höchstens eines dieser Blätter kann mit einem w_j übereinstimmen; das andere ist dann auch ein Blatt von T. Damit besitzt T zumindest $l \geq k$ Blätter.

Variante C. *Die vielleicht eleganteste Variante erhält man aus dem Handshake-Lemma.* Sei $n = |V|$. Wegen $|E| = |V| - 1$ ist dann $2n - 2 = 2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$. Sei v_0 ein Knoten vom Grad

[1] Man kann sich auch überlegen, dass $T - v$ genau k Komponenten besitzt, aber das brauchen wir hier nicht: Dazu zeigt man, dass es für jeden Knoten $y_0 \in V \setminus \{v\}$ einen Weg von y_0 zu einem der w_is gibt. In T gibt es einen Weg von y_0 nach v; sei $y_0 y_1 \cdots y_n v$ so ein Weg. Dann muss gelten $y_n \in \{w_1, \dots, w_k\}$. Dann gibt es aber auch ein minimales $0 \leq j \leq n$ mit $y_j = w_i$ für ein $1 \leq i \leq k$. Es ist dann $P = y_0 y_1 \cdots y_j$ ein Weg von y_0 nach $y_j = w_i$. Aufgrund der Minimalität von j enthält P kein weiteres $w_{i'}$ und damit auch nicht v. Also ist P ein Weg in $T - v$.

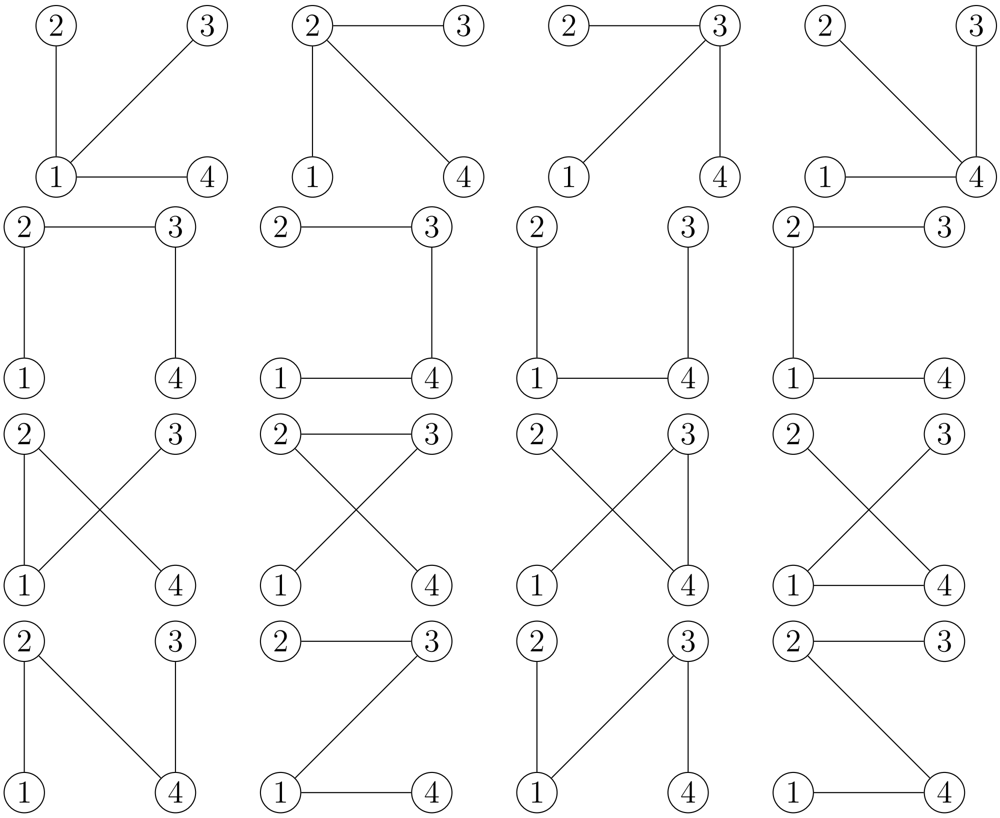
k. Sei $0 \le l \le n$, so dass es in $V \setminus \{v_0\}$ genau l Blätter besitzt. Dann haben die verbleibenden $n - l - 1$ Knoten jedenfalls Grad ≥ 2, und es gilt

$$2n - 2 = \deg(v_0) + \sum_{\substack{v \in V \setminus \{v_0\} \\ \deg(v)=1}} 1 + \sum_{\substack{v \in V \setminus \{v_0\} \\ \deg(v)\ge 2}} \deg(v) \ge k + l + 2(n - l - 1).$$

Damit folgt $0 \ge k - l$, also $l \ge k$.

Aufgabe 32. Zeichnen Sie alle Bäume auf der Eckenmenge $[4]$ sowie alle paarweise nicht isomorphen Bäume auf 6 Knoten (d.h. aus jeder Äquivalenzklasse einen Vertreter).

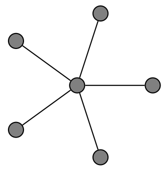
Lösung. Bäume auf $[4]$. Wir finden



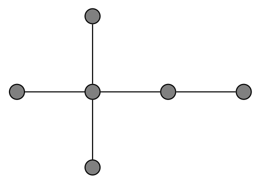
Da diese Bäume alle verschieden sind, und wir aus der Cayley-Formel wissen, dass es $4^2 = 16$ gibt, ist diese Liste vollständig. Beachten Sie, dass es aber nur zwei Isomorphieklassen gibt!

Um die Isomorphieklassen der Bäume auf 6 Knoten zu bestimmen müssen wir systematisch vorgehen. Wir bezeichnen wie in der vorigen Aufgabe mit $\Delta(T)$ den Maximalgrad eines Baums T. Da T höchstens 6 Knoten besitzt, gilt $\Delta(T) \le 5$. Weiters hat T genau 5 Kanten, und nach dem Handshake-Lemma gilt $10 = \sum_{v \in V(T)} \deg v$ mit $|V(T)| = 6$. Wir untersuchen nun die unterschiedlichen Möglichkeiten für $\Delta(T)$.

Fall 1: $\Delta(T) = 5$. Es gibt zumindest einen Knoten v mit Grad 5. Dieser muss dann mit allen anderen 5 Knoten benachbart sein. Weil T kreisfrei ist, kann es keine weiteren Kanten geben. Also ist die einzige Möglichkeit für T ein *Sterngraph* mit 5 Kanten.

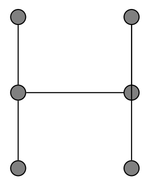


Fall 2: $\Delta(T) = 4$. Da der Baum zusammenhängend ist, hat jeder Knoten Grad ≥ 1. Nach dem Handshake-Lemma hat T nur einen Knoten v von Grad 4 (sonst wäre $4+4+1+1+1+1 = 12 > 10$). Der Knoten v und seine 4 Nachbarn bilden jedenfalls einen Stern mit 4 Kanten. Der letzte Knoten muss mit einem der Blätter dieses Sterns verbunden sein (sonst hätten wir ja einen Knoten von Grad 5). Aufgrund der Symmetrie dieser Blätter erhalten wir bis auf Isomorphie stets denselben Graph:

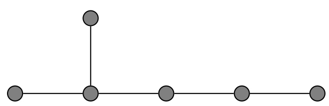


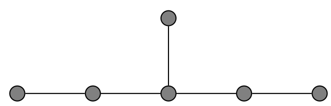
Fall 3: $\Delta(T) = 3$**.** Das Handshake-Lemma erlaubt nun 1 oder 2 Knoten von Grad 3.

Fall 3a: Zwei Knoten vom Grad 3**.** Seien v, w die beiden Knoten von Grad 3. Wegen $3 + 3 = 6$ haben die anderen vier Knoten Grad 1 (Handshake-Lemma). Da T zusammenhängend ist, gibt es einen v-w-Weg. Ein innerer Knoten eines Weges hat aber Grad ≥ 2, also besitzt der v-w-Weg keine inneren Knoten, hat also Länge 1. D.h. $\{v, w\}$ ist eine Kante des Graphen. Die anderen vier Knoten sind Blätter. Um $\deg(v) = \deg(w) = 3$ zu erfüllen, müssen je zwei dieser Blätter mit v bzw. w verbunden sein. Die einzige Möglichkeit ist damit

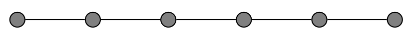


Fall 3b: Ein Knoten vom Grad 3**.** Die anderen 5 Knoten haben Grade 1 oder 2. Beginnen wir wieder mit unserem Knoten vom Grad 3 und seinen 3 Nachbarn: v_1, v_2, v_3. Damit ergibt sich ein Stern mit 3 Kanten. Nun können wir den fünften Knoten w an ein beliebiges Blatt anhängen; ohne Einschränkung sei dies v_1. Für den sechsten Knoten haben wir jetzt zwei Möglichkeiten: entweder hängen wir ihn an w an oder an eines der Blätter v_2 oder v_3. Bei Wahl von v_2 bzw. v_3 ergeben sich isomorphe Bäume. Also haben wir insgesamt die folgenden beiden Möglichkeiten:





Fall 4: $\Delta(T) = 2$**.** Da der Maximalgrad nun 2 ist, muss T ein Weg sein.



Fall 5: $\Delta(T) \leq 1$**.** Das ist nicht möglich. Nach dem Handshake-Lemma ist $2n - 2 \leq n$ und damit $n \leq 2$, im Widerspruch zu $n = 6$.

Durch unser systematisches Herangehen haben wir nun sicher für jede Isomorphieklasse einen Repräsentanten gefunden. Sind diese aber auch alle paarweise nicht isomorph? Ist $T \cong T'$ so ist $\Delta(T) = \Delta(T')$, also müssen wir uns die Frage nur für die beiden Bäume im Fall 3b stellen. Hier haben wir aber bereits in der letzten Musterlösung gesehen, dass diese beiden Graphen nicht isomorph sind („Entfernen des einzigen Knoten vom Grad 3 ergibt nicht isomorphe Graphen”).

An der Tafel würden diese Ausführungen in mündlicher Form genügen.