

Aufgabe 26. (a) Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ Graphen. Zeigen Sie: Eine bijektive Funktion $f: V \rightarrow V'$ ist genau dann ein Isomorphismus von G nach G' , wenn für alle $v \in V$ gilt $N(f(v)) = f(N(v))$.

(b) Finden Sie zwei endliche Graphen $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ und eine bijektive Abbildung $f: V \rightarrow V'$, so dass für alle $v \in V$ gilt $\deg v = \deg f(v)$, aber f kein Isomorphismus ist.

Teillösung. (a) Wir behandeln nur die Richtung " $\Rightarrow$ " in (a). Sei $f: G \rightarrow G'$ ein Isomorphismus. Wir zeigen $N(f(v)) = f(N(v))$ für alle $v \in V$. Sei dazu $v \in V$. Wir müssen zeigen: Für alle $w' \in V'$ ist $w' \in N(f(v))$ genau dann, wenn $w' \in f(N(v))$.

Sei also $w' \in V'$. Da f eine bijektive Abbildung $V \rightarrow V'$ ist, gibt es genau ein $w \in V$ mit $f(w) = w'$. Nun schließen wir

$$w' \in N(f(v)) \Leftrightarrow f(w) \in N(f(v)) \Leftrightarrow \{f(w), f(v)\} \in E'.$$

Da f ein Isomorphismus von Graphen ist, ist das weiters äquivalent zu

$$\{w, v\} \in E \Leftrightarrow w \in N(v) \Leftrightarrow f(w) \in f(N(v)).$$

Wobei die Richtung „ $\Leftarrow$ “ im letzten Schluss für beliebige Abbildungen gilt, wohingegen wir für $\Leftarrow$ benutzt haben, dass f injektiv ist (Sei $f(w) \in f(N(v))$. Dann existiert ein $w_0 \in N(v)$ mit $f(w_0) = f(w)$. Weil f injektiv ist, ist $w_0 = w$, also $w = w_0 \in N(v)$).

Zu (b). Wir behaupten, dass folgende beiden Graphen *nicht* isomorph sind.



Das scheint einerseits einleuchtend, andererseits erscheint ein tatsächlicher Beweis zunächst schwierig! Schließlich haben die beiden Graphen die selben Gradfolgen. In beiden Fällen hat der längste Weg Länge 5, nach Entfernung aller Blätter (die von einem Isomorphismus bijektiv auf Blätter abgebildet werden, nach 26(a)), erhalten wir beides Mal einen Graphen der isomorph ist zu P_3 , etc. Wir finden also auf den ersten Blick keine Eigenschaft, die die beiden Graphen unterscheidet (Vielleicht habe ich aber etwas übersehen!).

Abhilfe schaffen folgendes leichte

Lemma. Seien $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ Graphen und $f: G \rightarrow G'$ ein Isomorphismus.

(a) Für alle $v \in V$ ist $\deg v = \deg f(v)$.

(b) Sei $v \in V$. Die Einschränkung $f|_{V \setminus \{v\}}: V \setminus \{v\} \rightarrow V' \setminus \{f(v)\}$ ist ein Isomorphismus von $G - v$ nach $G' - f(v)$.

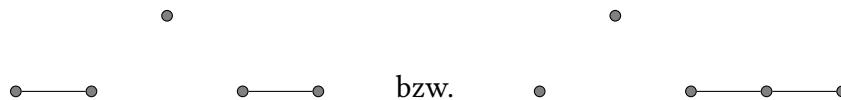
Beweis. (a) Nach Aufgabe 26(a) ist $N(v)$ in Bijektion mit $N(f(v))$, also insbesondere $\deg v = \deg f(v)$.

(b) Der folgende Beweis ist "Routine". Es ist klar, dass die Einschränkung von f eine bijektive Abbildung ist (wenn nicht: überprüfen!). Seien $w_1, w_2 \in V \setminus \{v\}$. Ist $\{w_1, w_2\} \in E(G - v)$, so

gibt es in G eine Kante $\{w_1, w_2\}$. Da $f: G \rightarrow G'$ ein Isomorphismus ist, ist $\{f(w_1), f(w_2)\}$ eine Kante von G' . Wegen $w_1 \neq v$ und $w_2 \neq v$ und der Bijektivität von f , ist $f(w_1) \neq f(v)$ und $f(w_2) \neq f(v)$. Damit ist aber $\{f(w_1), f(w_2)\}$, nach Definition des induzierten Teilgraphen, eine Kante von $G' - f(v)$. (Wir entfernen ja nur den Knoten $f(v)$ und alle damit inzidenten Kanten.)

Sei jetzt umgekehrt $\{f(w_1), f(w_2)\}$ eine Kante in $G' - f(v)$. Weil $f: G \rightarrow G'$ ein Isomorphismus ist, ist $\{w_1, w_2\}$ eine Kante von G . Wir müssen zeigen: $\{w_1, w_2\} \in E(G - v)$. Dazu genügt es zu zeigen $w_1 \neq v$ und $w_2 \neq v$. Nach Definition von $G' - f(v)$ ist $f(w_1) \neq f(v)$ und $f(w_2) \neq f(v)$. Aufgrund der Injektivität von f ist dann $w_1 \neq v$ und $w_2 \neq v$, und wir sind fertig. (QED)

Nun betrachten wir noch einmal unser ursprüngliches Problem: beide Graphen haben einen einzigen Knoten mit Grad 3. Gibt es einen Isomorphismus, muss dieser also diese beiden Knoten aufeinander abbilden (das ist (a)). Nach (b) müssen also die beiden Graphen, die durch Entfernen des jeweiligen Knotens von Grad 3 entstehen, ebenfalls isomorph sein. Dabei erhalten wir aber:



Offenbar sind diese beiden Graphen nicht mehr isomorph (z.B. stimmen die Gradfolgen nicht überein; alternativ sieht man, dass der rechte Graph einen Weg der Länge 3 enthält, der linke aber nicht; noch eine andere Variante ist, zu beobachten, dass der rechte Wald 2 Blätter besitzt, der linke aber 4. All diese Eigenschaften müssten von einem Isomorphismus aber erhalten werden.)

Aufgabe 28. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein *Kantenzug* (der Länge $n \geq 0$) ist eine (endliche) Folge $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$ von abwechselnd Knoten und Kanten aus G , mit $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ für $1 \leq i \leq n$. Zeigen Sie: Ist $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$ ein Kantenzug, so gibt es in G einen Weg zwischen v_0 und v_n , dessen Knoten eine Teilmenge von $\{v_0, \dots, v_n\}$ bilden.

Wir hatten eine korrekte Lösung an der Tafel (Gruppe 14:15). Das ist die folgende Variante A. Hier aber noch einige Varianten diese aufzuschreiben.

Variante A. Wir unterscheiden zwei Fälle. Sei $K = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$ der gegebene Kantenzug der Länge $n \geq 0$.

Im **Fall 1** sei $v_i \neq v_j$ für alle $1 \leq i < j \leq n$. Dann ist $v_1 v_2 \dots v_n$ ein Weg.

Im **Fall 2** seien $1 \leq i < j \leq n$ mit $v_i = v_j$. Dann ist $K' = (v_0, e_1, \dots, e_i, v_i, e_{j+1}, v_{j+1}, \dots, e_n, v_n)$ ein Kantenzug, der nur Knoten und Kanten aus K benutzt. Weiters enthält K' nur noch $i + (n - j) = n - (j - i) < n$ Kanten, ist also echt kürzer als K . Wir ersetzen nun K durch K' und fangen wieder von vorne an (d.h. betrachten Fall 1/Fall 2 für K').

Da K' kürzer ist als K , kann Fall 2 nur endlich oft auftreten (maximal n mal). Spätestens dann muss der neue Graph die Eigenschaft von Fall 1 erfüllen.

Das ist eine Art Induktionsbeweis. In der Variante B machen wir das etwas offensichtlicher.

Variante B. Wir zeigen die Aussage durch Induktion nach n . Der Fall $n = 0$ ist klar, da dann v_0 der triviale Weg ist. Sei nun $n > 0$ und gelte die Aussage für alle $n' < n$. Nun trifft

genauso wie oben entweder Fall 1 zu, dann sind wir fertig, oder wir sind in Fall 2, und wir konstruieren wieder K' mit Länge $n' < n$. Nach Induktionsvoraussetzung können wir aus K' den gesuchten Weg bilden.

Variante C. Wir betrachten alle “Teilkantenzüge” von K die in v_0 beginnen und in v_n enden. D.h., wir betrachten die Menge Ω aller Kantenzüge der Form

$$(v_0, e_{i_1}, v_{i_1}, e_{i_2}, v_{i_2}, \dots, e_{i_{k-1}}, v_{i_{k-1}}, e_{i_k}, v_n)$$

mit $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ und $k \geq 0$. (Achtung, wir betrachten nur jene derartige Folgen, die auch tatsächlich Kantenzüge sind!) Dann ist die Menge Ω endlich, da wir nur die endlich vielen Knoten und Kanten aus K verwenden (und sich auch die Vielfachheit nicht erhöhen kann).

Dann gibt es in Ω einen Kantenzug K' kürzestmöglicher Länge n . In diesem müssen die Knoten paarweise verschieden sein, denn sonst könnten wir wie in Fall 2 einen kürzeren Teilkantenzug von v_0 nach v_n konstruieren, im Widerspruch zur Minimalität. Also ergibt K' einen Weg.