Aufgabe 19. Zeigen Sie: Für $n \geq k \geq 0$ gilt

$$\binom{n+1}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-i}{k-i}.$$

(Achten Sie auf eine korrekte Behandlung der beiden Randfälle $n = k$ und $k = 0$.)

Lösung. Wir betrachten zuerst den Fall $k = 0$. Dann ist

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n}{0} = \sum_{i=0}^{0} \binom{n-i}{0-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-i}{k-i}.$$

Für $n \geq 0$ sei $A(n)$ die folgende Aussage:

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\} : \binom{n+1}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-i}{k-i}.$$

Wir zeigen $A(n)$ für alle $n \geq 0$ durch Induktion nach n. Für $n = 0$ ist notwendigerweise $k = 0$ und deshalb gilt $A(0)$ nach dem bereits Gezeigten. Sei nun $n > 0$ und es gelte $A(n-1)$. Wir zeigen $A(n)$.

Fall 1: $k = 0$: bereits gezeigt.

Fall 2: $k = n$. Dann gilt

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{n} = \binom{n+1}{1} = n+1,$$

und

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n-i}{k-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{n-i} = \sum_{i=0}^{n} 1 = n+1.$$

Damit ist der Fall $n = k$ gezeigt.

Fall 3: $0 < k < n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \overset{\text{(IV)}}{=} \sum_{i=0}^{k} \binom{n-1-i}{k-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-1-i}{k-1-i} \\
&= \underbrace{\binom{n-1-k}{k-k}}_{=1} + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\binom{n-1-i}{k-i} + \binom{n-1-i}{k-1-i} \right) \\
&= 1 + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-i}{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-i}{k-i}.
\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass wir bei der Anwendung der Induktionsvoraussetzung in dieser Rechnung tatsächlich $0 < k < n$ benutzt haben.

Aufgabe 20. Sei A eine nicht-leere Menge und $a_0 \in A$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathcal{P}(A) & \to \mathcal{P}(A) \\ X & \mapsto X \cup \{a_0\} \quad \text{falls } a_0 \notin X, \\ X & \mapsto X \setminus \{a_0\} \quad \text{falls } a_0 \in X, \end{cases}$$

bijektiv ist.

(b) Es sei $U := \{ X \in \mathcal{P}(A) : |X| \text{ ist ungerade} \}$ und $G := \{ X \in \mathcal{P}(A) : |X| \text{ ist gerade} \}$. Schließen Sie, dass die Einschränkung $f|_U : U \to G$ eine Bijektion mit Umkehrabbildung $f|_G : G \to U$ ist. [1]

(a) Es genügt zu zeigen $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(A)}$, denn dann ist f die Umkehrabbildung von f. [2] Insbesondere ist dann f bijektiv. Sei $X \in \mathcal{P}(A)$. Ist $a_0 \in X$, so ist

$$f \circ f(X) = f(f(X)) = f(X \setminus \{a_0\}) = (X \setminus \{a_0\}) \cup \{a_0\} = X.$$

Ist $a_0 \notin X$, so ist

$$f \circ f(X) = f(X \cup \{a_0\}) = (X \cup \{a_0\}) \setminus \{a_0\} = X.$$

(b) Wir beobachten zuerst $f(G) \subseteq U$ und $f(U) \subseteq G$, weshalb sich die Einschränkungen tatsächlich mit dem angegebenen Wertevorrat definieren lassen ("Wohldefiniertheit"). Nun müssen wir zeigen: $f|_G \circ f|_U = \mathrm{id}_U$ und $f|_U \circ f|_G = \mathrm{id}_G$. Das ist aber klar, denn für $X \in U$ gilt $f|_G \circ f|_U(X) = f \circ f(X) = X$, und für $X \in G$ gilt $f|_U \circ f|_G(X) = f \circ f(X) = X$, jeweils nach (a).

Bemerkung: Für $A = \emptyset$ ist $G = \{\emptyset\}$ und $U = \emptyset$, also ist die Voraussetzung $A \neq \emptyset$ wirklich notwendig!

Aufgabe 21. Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k} = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}.$$

(*Hinweis: einer von mehreren möglichen Lösungswegen benutzt Aufgabe 20.*)

Variante I. Sei $n \geq 1$. Wir erinnern uns, dass $\binom{n}{l}$ die Anzahl der l-elementigen Teilmengen von $[n]$ ist. Für

$$S_g := \sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k}, \qquad S_u := \sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k+1},$$

[1] Seien A, B (nicht-leere) Mengen und $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Ist $C \subseteq A$, so ist die Einschränkung $f|_C : C \to B$ definiert durch $f|_C(x) = f(x)$ für alle $x \in C$. In der Aufgabe schränken wir zusätzlich den Wertevorrat auf eine Teilmenge B' von B ein (hierbei muss jedoch $f(C) \subseteq B'$ gelten!); es ist in der Mathematik üblich den Wertevorrat einzuschränken ohne den Namen der Abbildung zu ändern, sofern dadurch keine Missverständnisse entstehen.

[2] Eine Funktion, die ihre eigene Umkehrabbildung ist, bezeichnet man als *Involution*.

zählt dann S_g die Teilmengen *gerader* Mächtigkeit von $[n]$, und S_u die Teilmengen *ungerader* Mächtigkeit von $[n]$. Da es nach Aufgabe 20 eine Bijektion zwischen den Teilmengen ungerader und gerader Mächtigkeit gibt, folgt sofort $S_g = S_u$ (man setze in Aufgabe 20 $A = [n]$; dann ist $S_g = |G|$ und $S_u = |U|$. Es gilt $|U| = |G|$ aufgrund der Existenz einer Bijektion zwischen U und G.) Aus der Vorlesung wissen wir $2^n = |\mathcal{P}([n])| = S_g + S_u = 2S_g$, also $S_g = S_u = 2^{n-1}$.

Variante II. Wir setzen in die binomische Formel $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ die Werte $a = 1$ und $b = -1$ ein:

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{\substack{k\geq 0\\ k \text{ gerade}}} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k\geq 0\\ k \text{ ungerade}}} \binom{n}{k}(-1)$$
$$= \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} - \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k+1} = S_g - S_u.$$

Damit folgt $S_g = S_u$. Weiters sehen wir

$$S_g + S_u = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} \overset{\text{VO}}{=} 2^n.$$

Damit folgt wie vorhin $S_g = S_u = 2^{n-1}$.

Variante III. Für $n \geq 1$ sei $A(n)$ die Aussage

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} = 2^{n-1} \quad \textbf{und} \quad \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}.$$

Wir zeigen $A(n)$ für $n \geq 1$ durch Induktion nach n. Induktionsanfang: Sei $n = 1$ (die Aussage ist für $n = 0$ falsch!). Dann ist

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} = \binom{1}{0} = 1 = 2^0 \quad \text{und} \quad \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k+1} = \binom{1}{1} = 1 = 2^0.$$

Sei nun $n \geq 1$ und gelte $A(n)$. Wir zeigen $A(n+1)$. Es ist

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n+1}{2k} = \sum_{k\geq 0} \left(\binom{n}{2k} + \binom{n}{2k-1} \right) = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} + \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k-1} = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} + \sum_{k\geq 1} \binom{n}{2k-1}$$
$$= \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} + \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k+1} \overset{\text{(IV)}}{=} 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

Analog dazu ist

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n+1}{2k+1} = \sum_{k\geq 0} \left(\binom{n}{2k+1} + \binom{n}{2k} \right) \overset{\text{(IV)}}{=} 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n.$$

Bemerkung: Beachten Sie, dass es wichtig war, in der Induktion beide Formeln gleichzeitig (also deren Konjunktion) zu beweisen, weil wir im Induktionsschritt des geraden Falls auch den ungeraden Fall verwenden und umgekehrt.

Für $n = 0$ stimmt die Aussage nicht!

Aufgabe 22. Aus einer Gruppe von 7 weiblichen und 5 männlichen Personen soll ein Komitee bestehend aus 5 Personen gebildet werden. Dabei sollen dem Komitee *zumindest* 2 weibliche und 2 männliche Personen angehören. Wieviele Möglichkeiten gibt es?

Lösung. Das Komitee kann aus 3 weiblichen und 2 männlichen, oder 2 weiblichen und 3 männlichen Personen bestehen. Es gibt also

$$\binom{7}{3}\binom{5}{2} + \binom{7}{2}\binom{5}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} + \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 350 + 210 = 560$$

Möglichkeiten.