Aufgabe 12. Für welche $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $2^n > n^2$? Stellen Sie durch Ausprobieren eine Vermutung auf und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

Lösung. Wir überprüfen zuerst die Ungleichung für kleine n.

n	2^n	n^2
0	1	0
1	2	1
2	4	4
3	8	9
4	16	16
5	32	25
6	64	36
7	128	49
8	256	64

Aufgrund dessen vermuten wir, dass die Ungleichung $2^n > n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{2, 3, 4\}$ gilt.

Wir beobachten zuerst:

$$\text{Für alle } n \geq 3 \text{ ist } n^2 > 2n + 1. \tag{$\star$}$$

(denn: $n^2 > 2n + 1 \Leftrightarrow n > 2 + \frac{1}{n}$, und wegen $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{3}$ ist diese Ungleichung für $n \geq 3$ erfüllt)

Wir zeigen nun mittels Induktion nach n, dass für alle $n \geq 5$ gilt $2^n > n$. Für $n = 5$ haben wir das bereits nachgerechnet. Sei nun $n \geq 5$ und gelte $2^n > n$. Dann ist

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{IV}}{>} 2 \cdot n^2 = n^2 + n^2 \overset{(\star)}{>} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$