

Aufgabe 44. Bestimmen Sie, ohne Verwendung eines Computers oder Taschenrechners, jeweils die kleinste Zahl $r \in \mathbb{N}_0$, welche die Kongruenz erfüllt.

(a) $r \equiv 16 \cdot 13 - 83 \cdot 8 + 902 \cdot (-2) \pmod{9}$.

(b) $r \equiv 15^7 + 179 \cdot 30 + (-29)^5 \pmod{14}$.

(c) $r \equiv \sum_{n=1}^{100} n^5 \pmod{4}$.

Aufgabe 45. Zeigen Sie: Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 46. (a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es eine Primzahl der Form $4k + 3$ gibt, die $4n - 1$ teilt.

(b) Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen der Form $4k + 3$ ($k \geq 0$) gibt. (*Hinweis:* Benutzen Sie (a) und passen Sie die Idee des Beweises von Euklid geeignet an.)