Aufgabe 40. Seien $n \geq 2$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ nicht alle 0.

(a) Zeigen Sie $\operatorname{ggT}(a_1, \ldots, a_n) = \operatorname{ggT}(a_1, \operatorname{ggT}(a_2, \ldots, a_n))$.

(b) Berechnen Sie $d = \operatorname{ggT}(210, 330, 462)$ und bestimmen Sie $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $d = 210x + 330y + 462z$.

Aufgabe 41. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Aus $a^n \mid b^n$ folgt $a \mid b$.

Aufgabe 42. (a) Bestimmen Sie händisch mit Hilfe des Siebs des Eratosthenes alle Primzahlen ≤ 100.

(b) Schreiben Sie ein Computerprogramm um alle Primzahlen $\leq 10\,000$ zu bestimmen. Wie viele sind es?

Aufgabe 43. Sei $H := \{4n + 1 : n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}$. Ein Element $p \in H \setminus \{1\}$ heißt H-*irreduzibel* wenn gilt: ist $p = ab$ mit $a, b \in H$ so folgt $a = 1$ oder $b = 1$. Beweisen Sie:

(a) Für $a, b \in H$ ist auch $ab \in H$ (damit ist H ein kommutatives Monoid).

(b) Jedes Element von H ist darstellbar als Produkt H-irreduzibler Elemente.

Geben Sie weiters ein Beispiel für ein Element aus H, das sich auf zwei verschiedene Arten als Produkt H-irreduzibler Elemente darstellen lässt.