Aufgabe 36. Beweisen Sie: Für jeden dreiecksfreien planaren Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ Knoten gilt $|E| \leq 2|V| - 4$. Folgern Sie daraus, dass $K_{3,3}$ nicht planar ist. (Ein Graph heißt *dreiecksfrei*, wenn er keinen zu K_3 isomorphen Teilgraphen enthält.)

Aufgabe 37. Berechnen Sie für folgende Zahlenpaare (a, b) jeweils den größten gemeinsamen Teiler d und finden Sie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $d = ax + by$.

(a) $a = 2448$ und $b = 264$.

(b) $a = 1229$ und $b = 282$.

Aufgabe 38. (a) Sind $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \geq b$ und gilt $a = bq + r$ mit $q, r \in \mathbb{N}_0$ und $r < b$, so ist

$$br \leq \frac{ab}{2}.$$

(b) Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a > b$. Zeigen Sie, dass der euklidische Algorithmus zur Berechnung von $\mathrm{ggT}(a, b)$ höchstens $\log_2(a) + \log_2(b)$ Schritte (=Divisionen mit Rest) benötigt.

Aufgabe 39. Für $a \in \mathbb{N}$ sei $T_<(a) := \{ d \in \mathbb{N} : d \mid a \text{ und } d < \sqrt{a} \}$ und $T_>(a) := \{ d \in \mathbb{N} : d \mid a \text{ und } d > \sqrt{a} \}$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine bijektive Abbildung zwischen $T_>(a)$ und $T_<(a)$.

(b) Eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ ist genau dann eine Quadratzahl, wenn $|T(a)|$ ungerade ist.

Auf der Rückseite finden Sie noch eine freiwillige Zusatzbeschäftigung für die Weihnachtsferien.
(*Wir werden diesen Zusatz in den Übungen nicht besprechen.*)

(Satz von Lamé) Im Folgenden untersuchen wir die Laufzeit des euklidischen Algorithmus noch einmal etwas genauer und beweisen den entsprechenden Satz von Lamé. Die Fibonacchi Zahlen F_n, $n \geq 1$, sind rekursiv definiert durch $F_1 = F_2 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 3$. Zeigen Sie:

(a) Der euklidische Algorithmus benötigt $n - 1$ Schritte um $\mathrm{ggT}(F_{n+1}, F_n)$ zu berechnen (für $n \geq 2$) und es gilt $\mathrm{ggT}(F_{n+1}, F_n) = 1$.

(b) Angenommen es gilt $a > b > 0$ und der auf a und b angewendete euklidische Algorithmus benötigt zumindest n Schritte. Dann gilt $b \geq F_{n+1}$ und $a \geq F_{n+2}$.

(c) Für jedes $n \geq 1$ gilt

$$F_n \geq \varphi^{n-2} \qquad \text{wobei} \qquad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

und für $n \geq 3$ gilt die strikte Ungleichung (Induktion nach n, es gilt $\varphi^2 = \varphi + 1$).

(d) Ist $a > b > 0$, so benötigt der euklidische Algorithmus höchstens

$$5 \log_{10}(b) + 1 \;\leq\; 5(\lfloor \log_{10}(b) \rfloor + 1)$$

Schritte um $\mathrm{ggT}(a, b)$ zu berechnen.

Bemerkung.

- $\lfloor \log_{10}(b) \rfloor + 1$ ist die Anzahl der Stellen in der Dezimaldarstellung der kleineren der beiden Zahlen, b.
- Mit $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ gilt

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \leq \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \approx \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$$

für alle $n \geq 1$. (Diese Formel kann man leicht mittels Induktion beweisen; um sie aus der Definition von F_n zu berechnen, wenn man sie nicht kennt, benötigt man aber etwas mehr an Methoden.) Dann ist

$$5 \log_{10}(F_n) + 1 \approx n \log(\varphi) - \log(\sqrt{5}) + 1 \approx 1.045n + 0.651.$$

Tatsächlich brauchen wir $n - 1$ Schritte um $\mathrm{ggT}(F_{n+1}, F_n)$ zu berechnen.