Aufgabe 19. Zeigen Sie: Für $n \geq k \geq 0$ gilt

$$\binom{n+1}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-i}{k-i}.$$

(Achten Sie auf eine korrekte Behandlung der beiden Randfälle $n = k$ und $k = 0$.)

Aufgabe 20. Sei A eine nicht-leere Menge und $a_0 \in A$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathcal{P}(A) & \to \mathcal{P}(A) \\ X & \mapsto X \cup \{a_0\} \quad \text{falls } a_0 \notin X, \\ X & \mapsto X \setminus \{a_0\} \quad \text{falls } a_0 \in X, \end{cases}$$

bijektiv ist.

(b) Es sei $U := \{ X \in \mathcal{P}(A) : |X| \text{ ist ungerade} \}$ und $G := \{ X \in \mathcal{P}(A) : |X| \text{ ist gerade} \}$. Schließen Sie, dass die Einschränkung $f|_U\colon U \to G$ eine Bijektion mit Umkehrabbildung $f|_G\colon G \to U$ ist. [1]

Aufgabe 21. Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k} = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}.$$

(*Hinweis: einer von mehreren möglichen Lösungswegen benutzt Aufgabe 20.*)

Aufgabe 22. Aus einer Gruppe von 7 weiblichen und 5 männlichen Personen soll ein Komitee bestehend aus 5 Personen gebildet werden. Dabei sollen dem Komitee *zumindest* 2 weibliche und 2 männliche Personen angehören. Wieviele Möglichkeiten gibt es?

[1] Seien A, B (nicht-leere) Mengen und $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Ist $C \subseteq A$, so ist die Einschränkung $f|_C\colon C \to B$ definiert durch $f|_C(x) = f(x)$ für alle $x \in C$. In der Aufgabe schränken wir zusätzlich den Wertevorrat auf eine Teilmenge B' von B ein (hierbei muss jedoch $f(C) \subseteq B'$ gelten!); es ist in der Mathematik üblich den Wertevorrat einzuschränken ohne den Namen der Abbildung zu ändern, sofern dadurch keine Missverständnisse entstehen.