

Das erste Blatt ist freiwillig. Die Aufgaben zählen als Bonus.

Aufgabe 1. Für die logischen Verknüpfungen \neg, \wedge, \vee gelten die folgenden Rechenregeln:

Kommutativgesetz:	$a \vee b = b \vee a,$	$a \wedge b = b \wedge a,$
Assoziativgesetz:	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c,$	
	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c,$	
Distributivgesetz:	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$	
	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$	
Verschmelzungsgesetze:	$a \vee (b \wedge a) = a,$	$a \wedge (b \vee a) = a,$
Idempotenzgesetz:	$a \vee a = a,$	$a \wedge a = a,$
Neutralitätsgesetze:	$a \vee 0 = a,$	$a \wedge 1 = a,$
Extremalgesetz:	$a \vee 1 = 1,$	$a \wedge 0 = 0,$
Komplementaritätsgesetze:	$a \vee \neg a = 1,$	$a \wedge \neg a = 0,$
Dualitätsgesetze:	$\neg 0 = 1,$	$\neg 1 = 0,$
Doppelnegationsgesetz:	$\neg(\neg a) = a,$	
Gesetze von De Morgan:	$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b,$	
	$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b.$	

Abbildung 1: Schichl-Steinbauer, *Einführung in das mathematische Arbeiten*, Theorem 3.1.10

Seien a, b, c Aussagen. Beweisen Sie

- (a) das erste Gesetz von De Morgan, d.h. $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$, mit Wahrheitstafel;
- (b) das erste Distributivgesetz, d.h. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, mit Wahrheitstafel;
- (c) das zweite Gesetz von De Morgan, d.h. $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$, mit Hilfe der Rechenregeln, indem Sie in das erste Gesetz von De Morgan für a und b die jeweilige Negation einsetzen.

Aufgabe 2. Es seien p, q logische Aussagen. Zeigen Sie, dass folgende Äquivalenzen gelten (d.h., dass diese Verknüpfungen von Aussagen unabhängig der Wahrheitswerte von p und q stets wahr sind).

- (a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p).$
- (b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q).$

Aufgabe 3. Erklären Sie in Worten, was die folgende Aussage bedeutet.

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} : \frac{1}{k} < \frac{m}{n}.$$

Bilden Sie anschließend die logische Negation der Aussage.

Aufgabe 4. Die Meiers kommen:¹ „Die Meiers werden uns heute abend besuchen“, kündigt Frau Müller an. „Die ganze Familie, also Herr und Frau Meier mit ihren drei Kindern Barbara, Kathrin und Walter?“ fragt Herr Müller bestürzt. Darauf Frau Müller, die keine Gelegenheit vorübergehen lässt, ihren Mann zu logischem Denken anzuregen: „Nun, ich will es dir so erklären: Wenn Herr Meier kommt, dann bringt er auch seine Frau mit. Mindestens eines der beiden Kinder Walter und Kathrin kommt. Entweder kommt Frau Meier oder Barbara, aber nicht beide. Entweder kommen Barbara und Kathrin oder beide nicht. Und wenn Walter kommt, dann auch Kathrin und Herr Meier. So, jetzt weißt du, wer uns heute abend besuchen wird.“

Wer kommt und wer kommt nicht?

¹Aus den Logeleien von Zweistein (dtv, 1984)