Ü 1. Bestimmen Sie die (multiplikative) Ordnung aller Elemente von $(\mathbb{Z}/14\mathbb{Z})^\times$.

Ü 2. Seien $a, b, c \in [0, 9]$. Dann ist die Zahl $(abcabc)_{10}$ durch 13 teilbar.

Ü 3. Sei $g \in \mathbb{N}$.

(1) Zeigen Sie: Zu jedem $a \in \mathbb{N}$ gibt es $a^*, a^{**} \in \mathbb{N}$ mit $a = a^*a^{**}$ und so, dass gilt

- $\mathrm{ggT}(g, a^*) = 1$,
- es gibt ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $a^{**} \mid g^k$.

(2) Sind $a = a^*a^{**}$ und $b = b^*b^{**}$ wie oben, und $a \mid b$, so folgt $a^* \mid b^*$ und $a^{**} \mid b^{**}$. (*Hinweis:* Überlegen Sie sich zuerst $\mathrm{ggT}(a^*, b^{**}) = 1$ und $\mathrm{ggT}(b^*, a^{**}) = 1$.)

(3) Zeigen Sie weiters, dass a^* und a^{**} mit diesen Eigenschaften durch a eindeutig bestimmt sind.

Man bezeichnet (a^*, a^{**}) als *g-Faktorisierung* von a.

Bemerkung: Diese Faktorisierung spielt bei der Bestimmung von Periodenlänge und Vorperiodenlänge der g-adischen Zifferndarstellung einer rationalen Zahl eine Rolle.

Für die folgenden Aufgaben ist Stoff aus der Vorlesungseinheit vom 24.1. hilfreich (insbesondere Abschnitt 4.1).

Ü 4. (a) Bestimmen Sie die g-adischen Zifferndarstellungen folgender Zahlen für das angegebene g:

$$\frac{39}{44} \quad \text{für } g = 10, \qquad \frac{1}{5} \quad \text{für } g = 2,$$

(b) Bestimmen Sie die Vorperiodenlänge und Periodenlänge der Dezimaldarstellung von

$$\frac{18749}{34375}.$$

Ü 5. Finden Sie eine rationalen Zahl x und $g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, so dass gilt:

- die g_1-adische Darstellung von x hat Periodenlänge 2,
- die g_2-adische Darstellung von x hat Periodenlänge 6,
- die g_3-adische Darstellung von x bricht ab.

Ü 6. Für welche Basiszahlen $g \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ haben alle Brüche $\frac{1}{d}$, $d \in [1, 100]$, endliche g-adische Darstellungen?