**Ü 1.** Sei

$$H = \{ 1 + 3n \mid n \in \mathbb{N}_0 \} = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, \ldots\} \subset \mathbb{N}.$$

Ein Element $p \in H \setminus \{1\}$ heißt *irreduzibel in* $H$ wenn gilt: Ist $p = ab$ mit $a, b \in H$, so folgt $a = 1$ oder $b = 1$ (vergleiche mit Satz 2.2(c)). Beweisen Sie:

(1) Für $a, b \in H$ ist auch $ab \in H$.

(2) Jedes Element von $H$ ist darstellbar als Produkt irreduzibler Elemente von $H$.

(3) Diese Darstellung ist *nicht* eindeutig. Das heißt, es gibt ein $a \in H$, so dass $a$ auf zwei verschiedene Arten als Produkt irreduzibler Elemente dargestellt werden kann.

*Optionaler Zusatz:* Charakterisieren Sie alle irreduziblen Elemente von $H$ mittels ihrer Primfaktorenzerlegung (in $\mathbb{N}$).

**Ü 2.** Eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ ist eine Quadratzahl wenn es ein $b \in \mathbb{N}$ gibt mit $a = b^2$. Zeigen Sie, dass für $a \in \mathbb{N}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $a$ ist eine Quadratzahl.

(ii) Für alle $p \in \mathbb{P}$ ist $\mathrm{v}_p(a)$ gerade.

(iii) Die Anzahl der positiven Teiler von $a$ ist ungerade.

**Ü 3.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ mit verschiedenen $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{P}$ und $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{e_i+1} - 1}{p_i - 1} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{p^{\mathrm{v}_p(n)+1} - 1}{p - 1}.$$

*Hinweis:* $\sigma$ ist die Teilersummenfunktion (Definition 2.17).

Für die folgenden Aufgaben ist Stoff aus der Vorlesungseinheit vom 22.11. hilfreich (insbesondere die grundlegenden Rechenregeln für Kongruenzen).

**Tr 1.** Geben Sie vollständige Repräsentantensysteme der Restklassen modulo $m$ für $m = 1$, $m = 2$, und $m = 5$ an. Was bedeutet Kongruenz modulo 1? modulo 2?

**Tr 2.** Bestimmen Sie jeweils das kleinste $r \in \mathbb{N}_0$, das folgende Kongruenz erfüllt:

| | |
|---|---|
| (a) $17 \equiv r \mod 5$, | (b) $-17 \equiv r \mod 5$, |
| (c) $-17 \equiv r \mod 13$, | (d) $12 \cdot 28 \equiv r \mod 3$, |
| (e) $23 - 31 \equiv r \mod 6$, | (f) $153944196 + 2147018644 \equiv r \mod 5$, |
| (g) $20 \cdot 87 \equiv r \mod 7$, | (h) $3^5 \equiv r \mod 8$. |

**Ü 4.** Bestimmen Sie jeweils das kleinste $r \in \mathbb{N}_0$, das folgende Kongruenz erfüllt:

(a) $25 \cdot 27 + 16^{27} - 15 \cdot 371 \equiv r \mod 15$,

(b) $5^{118} - 3^{173} \equiv r \mod 8$,

(c) $53^{103} + 103^{53} \equiv r \mod 39$,

(d) $1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + 99^5 + 100^5 \equiv r \mod 4$.

**Tr 3.** Zeigen Sie, mit Hilfe der Theorie der Kongruenzen, $89 \mid (2^{44} - 1)$ und $97 \mid (2^{48} - 1)$.

**Tr 4.** Lösen Sie noch einmal Ü 1 – Ü 3 von Übungsblatt 1, diesmal mit Hilfe von Kongruenzen.

**Ü 5.** Beweisen Sie: Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ ist $3^m + 3^n + 1$ keine Quadratzahl. (*Hinweis:* Arbeiten Sie modulo 8.)