Tr 1. Warum muss in Satz 1.18 vorausgesetzt werden, dass $\frac{a}{b}$ die reduzierte Bruchdarstellung von x ist?

Tr 2. Schließen Sie mit Hilfe von Korollar 1.19, dass $\sqrt{p}$ für alle $p \in \mathbb{P}$ irrational ist.

Tr 3. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $c, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Wann besitzt die lineare Gleichung $a_1X_1 + \dots + a_nX_n = c$ eine Lösung in $\mathbb{Q}$?

Ü 1. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $F_n = 2^{2^n} + 1$ die n-te Fermat-Zahl. Beweisen Sie:

(1) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $F_n - 2 = \prod_{i=0}^{n-1} F_i$.

(2) Für $0 \leq m < n$ gilt $\operatorname{ggT}(F_m, F_n) = 1$. (*Hinweis:* Benutzen Sie (1).)

(3) Geben Sie mit Hilfe von (2) einen Beweis dafür, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Ü 2. Zeigen Sie, dass $n^4 + 4^n$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ keine Primzahl ist.

Ü 3. Mit Hilfe des *Siebs des Erathostenes* lassen sich für $0 \leq a < b$ alle Primzahlen im Intervall $[a, b]$ wie folgt bestimmen:

(1) Wir setzen voraus, dass wir die Primzahlen im Intervall $[2, \sqrt{b}]$ kennen; seien diese bezeichnet mit $p_1 < p_2 < \dots < p_n$.

(2) Notiere alle Zahlen im Intervall $[a, b]$.

(3) Streiche sukzessive alle Vielfachen von p_i für $i = 1, 2, \dots, n$.

(4) Die verbleibenden Zahlen sind genau die Primzahlen im Intervall $[a, b]$.

Bestimmen Sie mit Hilfe des Siebs des Erathostenes alle Primzahlen p mit $p \leq 100$.

Für die folgenden Trainingsbeispiele braucht man keinen Taschenrechner!

Tr 4. Bestimmen Sie die Primfaktorenzerlegungen von 196, 210 und 1683.

Tr 5. Welche der folgenden Zahlen sind Primzahlen: 273, 443, 788235381?

Tr 6. Bestimmen Sie alle Primzahlen die 50! teilen. (Erinnerung: $50! = 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdots 2 \cdot 1$)

***Ü 4.** Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$, für die gilt

$$\sum_{j=1}^{n} j \;\Big|\; \prod_{j=1}^{n} j.$$

Für die folgenden Aufgaben ist Stoff aus der Vorlesungseinheit vom 8.11. hilfreich (insbesondere Satz 2.6 und die Definition der p-adischen Bewertung).

Ü 5. Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen der Form $4k + 3$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ gibt.

Ü 6. Sei $p \in \mathbb{P}$ und bezeichne $\mathrm{v}_p \colon \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0$ die p-adische Bewertung. Seien $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Beweisen Sie:

(1) $\mathrm{v}_p(ab) = \mathrm{v}_p(a) + \mathrm{v}_p(b)$,

(2) $\mathrm{v}_p(a) = \max\left\{ k \in \mathbb{N}_0 \mid p^k \mid a \right\}$,

(3) Ist $a + b \neq 0$, so gilt $\mathrm{v}_p(a + b) \geq \min\{\mathrm{v}_p(a), \mathrm{v}_p(b)\}$. Ist $\mathrm{v}_p(a) \neq \mathrm{v}_p(b)$, so gilt sogar Gleichheit. (*Hinweis:* Verwenden Sie (2).)