

**Ü 1.** Zeigen Sie: Das Quadrat einer ganzen Zahl ist entweder von der Form  $3k$  oder  $3k + 1$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Ü 2.** Zeigen Sie: Die dritte Potenz einer ganzen Zahl ist entweder von der Form  $7k$ ,  $7k + 1$  oder  $7k - 1$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Tr 1.** Seien  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ . Zeigen Sie: Aus  $a \mid b$  und  $c \mid d$  folgt  $ac \mid bd$ . Folgt auch  $a + c \mid b + d$ ?

**Ü 3.** Zeigen Sie für  $n \in \mathbb{N}$  durch Induktion nach  $n$ :

(a)  $8 \mid 5^{2n} + 7$  (Hinweis:  $5^{2(k+1)} + 7 = 5^2(5^{2k} + 7) - 5^2 \cdot 7 + 7$ ),

(b)  $15 \mid 2^{4n} - 1$ .

**Ü 4.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $a \in \mathbb{Z}$ . Zeigen Sie: Aus  $m \mid n$  folgt  $a^m - 1 \mid a^n - 1$ .  
(Hinweis:  $b^k - 1 = b^k - 1^k = \dots$ )

**Tr 2.** Zeigen Sie: Für  $a \in \mathbb{Z}$  ist  $\text{ggT}(a, 0) = |a|$ .

Für die folgenden Aufgaben ist Stoff aus der Vorlesungseinheit vom 11.10. hilfreich (insbesondere Sätze 1.6, 1.8 und 1.10).

**Tr 3.** Bestimmen Sie  $\text{ggT}(18, -21)$ ,  $\text{ggT}(12003, 3)$  und  $\text{kgV}(28, 70)$ .

**Ü 5.** Beweisen Sie: Sind  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $\text{ggT}(a, b) = 1$  so gilt auch  $\text{ggT}(a + b, ab) = 1$ .

**\*Ü 6** (Schwierigere Variante von Ü 4). Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $a \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Beweisen Sie:

$$\text{ggT}(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\text{ggT}(m, n)} - 1.$$