

45. Es seien $a, b, c \in [0, \infty)$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = \max\{a, b, c\}.$$

46. Es sei $a_0 \in (0, 1)$ und eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - a_n} \quad \text{für } n \geq 0.$$

Beweisen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

47. Einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ordnen wir die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu, wobei

$$s_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{für } n \geq 0$$

der Mittelwert der ersten $n+1$ Folgenglieder sein soll.

- (a) Zeigen Sie: Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ mit $a \in \mathbb{R}$, so ist auch $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a$.
- (b) Geben Sie ein Beispiel für eine divergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, für die die Folge der Mittelwerte dennoch konvergiert.

48. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte Menge und $s \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:

$$s = \sup(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in M: s \geq x \text{ und} \\ \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in M: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s. \end{cases}$$

49. Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $k \in \mathbb{N}_+$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}.$$

Hinweis: $a_n - a = \sqrt[k]{a_n^k} - \sqrt[k]{a^k} = (\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a})(\dots)$.