35. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$. Beweisen Sie: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq k$ gilt $b_n \neq 0$ und

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq k}} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

41. Sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ mit $I_n = [a_n, b_n]$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen $A_n = (-\infty, a_n)$ und $B_n = (b_n, \infty)$ und wir setzen $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ sowie $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Sei $x \in \mathbb{R}$ so dass $\forall n \in \mathbb{N} : x \in I_n$. Beweisen Sie, dass

$$x = \sup A = \inf B$$

gilt. Zeigen Sie auch $x \notin A$ und $x \notin B$.

42. Bestimmen Sie die Grenzwerte untenstehender Folgen:

(a) $a_n = \frac{5n+2}{3n+7}$ für $n \in \mathbb{N}$,

(b) $b_n = \frac{2n^2-4n+5}{n^3+2\sqrt{n}}$ für $n \in \mathbb{N}_+$,

(c) $c_n = \sqrt{4n^2+2n+3} - 2n$ für $n \in \mathbb{N}$,

(d) $d_n = \binom{n}{k} n^{-k}$ für $n \in \mathbb{N}$ und ein fest gewähltes $k \in \mathbb{N}_+$.

43. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_+$ mit $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Beweisen Sie:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \begin{cases} \text{konvergiert falls } q < 1, \\ \text{divergiert falls } q > 1, \end{cases}$$

und im Fall $q = 1$ lässt sich keine Aussage über die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ treffen.

44. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.