35. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$. Beweisen Sie: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq k$ gilt $b_n \neq 0$ und

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq k}} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

36. Bestimmen Sie Infimum und Supremum folgender Mengen. Untersuchen Sie, ob diese auch Minimum bzw. Maximum sind.

$$A = \left\{\, 2^{-m} + n^{-1} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N}_+ \,\right\} \qquad B = \left\{ \frac{x}{1+x} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \right\}$$

37. Bestimmen Sie für das halboffene Intervall $I = [a, b)$ mit a, $b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ Infimum und Supremum. Untersuchen Sie, ob diese auch Minimum bzw. Maximum sind.

38. A und B seien nichtleere nach unten beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Beweisen Sie

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

39. X und Y seien nichtleere Mengen und $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ sei eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass gilt

$$\sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} f(x, y) \;\leq\; \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} f(x, y).$$

Geben Sie ein Beispiel, in dem „$<$” gilt.

40. (a) Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $a + bi$ mit a, $b \in \mathbb{R}$ dar:

(i) $\frac{5+i}{2+3i}$.

(ii) Alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$.

(b) Skizzieren Sie die untenstehenden Mengen in der komplexen Ebene.

(i) $M_1 = \{\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |\frac{1}{z}| < 2 \,\}$

(ii) $M_2 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}((1 + i)z) = 0 \,\}$

(iii) $M_3 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1,\ |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2},\ \mathrm{Im}(z) \geq 0 \,\}$