

30. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen bzw. Ungleichungen:

- (a) $|x - 1| = |x - 3|$ für $x \in \mathbb{R}$.
- (b) $|x - 1| + |x - 2| > 1$ für $x \in \mathbb{R}$.
- (c) $\frac{1}{3} < \left| \frac{2x-1}{3-2x} \right| < \frac{1}{2}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$.

31. (a) Bestimmen Sie die maximale Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$, auf der sich durch die Abbildungsvorschrift

$$x \mapsto \sqrt{9 - \sqrt{25 - \sqrt{x}}}$$

eine reellwertige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ definieren lässt.

- (b) Ist f injektiv?
- (c) Bestimmen Sie die Bildmenge $W = f(D)$, so dass $f: D \rightarrow W$ surjektiv ist.
- (d) Bestimmen Sie, falls möglich, die Umkehrfunktion $f^{-1}: W \rightarrow D$.

Hinweis: Stellen Sie f als Komposition geeigneter Funktionen dar.

32. Geben Sie möglichst einfache Charakterisierungen folgender Mengen:

$$\begin{aligned} A &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{n}{n+1}, \frac{2n+1}{n+1} \right), & A' &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} \left(\frac{n}{n+1}, \frac{2n+1}{n+1} \right), \\ B &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{n}{n+1}, \frac{2n+3}{n+1} \right), & B' &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} \left(\frac{n}{n+1}, \frac{2n+3}{n+1} \right). \end{aligned}$$

33. Es seien $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $I_n = [a_n, b_n]$ und $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $J_n = [c_n, d_n]$ zwei Intervallschachtelungen. Es seien $a_n, b_n, c_n, d_n, \alpha, \gamma \in \mathbb{R}_+$ und es gelte $a_n \leq \alpha \leq b_n$ und $c_n \leq \gamma \leq d_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\left(\left[\frac{1}{b_n}, \frac{1}{a_n} \right] \right)_{n \in \mathbb{N}}$ und $([a_n c_n, b_n d_n])_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls zwei Intervallschachtelungen sind.
- (b) Welche reellen Zahlen stellen die zwei neuen Intervallschachtelungen dar?

34. $f: X \rightarrow Y$ sei eine Abbildung. Beweisen Sie:

- (a) Existiert eine Abbildung $g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$, so ist f injektiv.
- (b) Existiert eine Abbildung $h: Y \rightarrow X$ mit $f \circ h = \text{id}_Y$, so ist f surjektiv.