24. Es seien $k, n \in \mathbb{N}_+$ mit $k \leq n$. Bestimmen Sie die Anzahl der Vektoren der Länge k mit paarweise verschiedenen Einträgen aus $M_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

25. Es sei K ein Körper und $a, b, c \in K$. Zeigen Sie (mit Hilfe der Körperaxiome):

(a) $-(-a) = a$.

(b) $(-a)(-b) = ab$.

(c) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$.

(d) Aus $a \neq 0$ und $ab = ac$ folgt $b = c$.

(e) Ist $a \neq 0$, so gibt es genau ein $x \in K$ mit $ax + b = c$.

26. Es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Beweisen Sie:

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} = \sum_{k=1}^n \binom{2n}{2k-1} = 2^{2n-1}.$$

27. Es sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie: Ist $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$, so ist $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (*Hinweis:* Betrachten Sie $(x + \frac{1}{x})^n$.)

28. Es sei K ein geordneter Körper und $a, b \in K_+$. Zeigen Sie:

$$a < b \Rightarrow a^2 < b^2.$$

Insbesondere ist die Abbildung $f: K_+ \cup \{0\} \rightarrow K_+ \cup \{0\}$, $a \mapsto a^2$ injektiv.

29. Es sei K ein geordneter Körper und $a, b \in K$. Zeigen Sie:

$$|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0.$$