Erinnerung: Ist $n < m$, so hat die *leere Summe* $\sum_{k=m}^{n} a_k$ den Wert 0, und das *leere Produkt* $\prod_{k=m}^{n} a_k$ den Wert 1.

**18.** Es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}.$$

**19.** $X$ und $Y$ seien nichtleere Mengen und $f\colon X \to Y$ sei eine Abbildung. Seien weiters $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$.

(a) Beweisen Sie:

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \qquad \text{und} \qquad B \supseteq f(f^{-1}(B)).$$

(b) Zeigen Sie durch Angabe von Gegenbeispielen, dass in den Inklusionen in (a) im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

**20.** Beweisen Sie folgende Variante der Bernoullischen Ungleichung: Für $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < 1$ und $n \in \mathbb{N}_+$ gilt

$$(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}.$$

**21.** $X$ und $Y$ seien nichtleere Mengen und $f\colon X \to Y$ sei eine Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass gilt: Für alle $A$, $B \subseteq X$ ist

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(b) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $f$ ist injektiv.

(ii) Für alle $A$, $B \subseteq X$ gilt $f(A \cap B) \supseteq f(A) \cap f(B)$.

(iii) Für alle $A$, $B \subseteq X$ gilt $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

**22.** Es sei $n \in \mathbb{N}$. Verwenden Sie die folgende Idee um eine Formel für die Summe der dritten Potenzen $\sum_{k=1}^{n} k^3$ herzuleiten: Die Summe

$$\sum_{k=1}^{n}(k^4-(k-1)^4)$$

kann auf zwei verschiedene Arten geschrieben werden: Einmal — als Teleskopsumme — durch die Reste der ersten und letzten Glieder, die nicht wegfallen. Das andere Mal — durch Auflösen der Klammer — als Kombination der Summen der dritten, zweiten, ersten und nullten Potenzen. Dadurch (und durch die bekannten Formeln der Summen der niedrigeren Potenzen) kann $\sum_{k=1}^{n} k^3$ berechnet werden.

**23.** Es sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n \qquad \text{und, falls } n \geq 1, \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0.$$