12. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

13. Es sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie (a) durch vollständige Induktion, (b) durch Ausmultiplizieren mit dem Nenner und Berechnung der entstehenden Teleskopsumme:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

14. Es sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie (a) durch vollständige Induktion, (b) durch Ausmultiplizieren mit dem Nenner und Berechnung der entstehenden Teleskopsumme:

$$\sum_{k=1}^{n} ka^k = \frac{a}{(1-a)^2}(na^{n+1} - (n+1)a^n + 1).$$

15. Wir möchten die bekannte Aussage beweisen, dass die Winkelsumme eines Dreiecks stets π ist. Dazu wollen wir zeigen, dass sämtliche Dreiecke dieselbe Winkelsumme haben. Dann genügt es für ein beliebiges Dreieck zu überprüfen, dass dieses Winkelsumme π hat. Wir wollen also Folgendes beweisen.

Behauptung. In einer Menge von n Dreiecken haben je zwei Dreiecke dieselbe Winkelsumme.
Beweis: Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach n. Für $n = 1$ gilt die Aussage trivialerweise. Angenommen, die Behauptung gilt für eine Menge von n Dreiecken ($n \geq 1$). Wir müssen zeigen, dass sie auch für $n+1$ Dreiecke gilt. Wir nummerieren die Dreiecke mit $1, \dots, n+1$. Entfernen wir das erste Dreieck, so bleiben n Dreiecke über. Nach Induktionsvoraussetzung haben diese dieselbe Winkelsumme. Entfernen wir stattdessen das letzte Dreieck, so folgt in gleicher Weise, dass die ersten n Dreiecke dieselbe Winkelsumme haben. Da also das erste Dreieck dieselbe Winkelsumme hat wie die Dreiecke in der Mitte, und die Dreiecke in der Mitte dieselbe Winkelsumme haben wie das letzte Dreieck, haben alle Dreiecke dieselbe Winkelsumme.

(a) Ist dieser Beweis korrekt?

(b) Ersetzen Sie im Beweis sinngemäß „Je n Dreiecke haben dieselbe Winkelsumme" durch „Je n Pferde haben dieselbe Farbe". Lässt sich damit beweisen, dass alle Pferde dieselbe Farbe haben?

(Begründen Sie Ihre Antworten!)

16. Es sei $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $p^n > n$.

17. Zeigen Sie: Ist A eine endliche Menge mit $|A| = n$, so gilt $|\mathbb{P}(A)| = 2^n$ für die Potenzmenge $\mathbb{P}(A)$.