71. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion und es sei $c \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, direkt mit Hilfe der ε-δ-Definition der Stetigkeit, dass die Menge

$$\{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) < c \,\}$$

offen ist, d.h.

$$\forall x_0 \in C\ \exists \delta > 0\colon \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq C.$$

72. Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^7 + x = 1$ genau eine reelle Lösung besitzt.

73. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion und es seien $x_1, \dots, x_n \in [a,b]$. Zeigen Sie:

$$\exists y \in [a,b]\colon \quad f(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

74. $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sei definiert durch $f(x) = x^2 - 2$. Zeigen Sie, dass f stetig ist und weiters, dass gilt $f(0) = -2 < 2 = f(2)$, aber $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [0,2] \cap \mathbb{Q}$. (Das heißt, der Zwischenwertsatz gilt nicht für stetige $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.)
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ verwenden.

75. Bestimmen Sie im Existenzfall die folgenden Grenzwerte (für $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$):

(a) $\displaystyle\lim_{z\to 1} \frac{z^m - 1}{z^n - 1} \quad (m, n \in \mathbb{N}_+)$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x - \sqrt{x}} - \sqrt{x}$.