66. Bestimmen Sie (mit Begründung) alle $a \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} x^3 + 2ax^2 + a^2 & \text{wenn } x \leq 1, \\ ax^2 + \frac{4a^2}{1+x^2} & \text{wenn } x > 1 \end{cases}$$

überall stetig ist.

67. Es seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktionen $|f|\colon D \to \mathbb{R}$ und $\max\{f, g\}\colon D \to \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$\forall x \in D\colon \quad |f|(x) = |f(x)|, \quad \max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}.$$

Überprüfen Sie, ob folgende Aussagen richtig sind (Beweis oder Gegenbeispiel):

(a) $|f|$ stetig $\Rightarrow$ f stetig.

(b) f und g stetig $\Rightarrow$ $\max\{f, g\}$ stetig.

(c) fg stetig $\Rightarrow$ f und g stetig.

68. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^2$$

zwar stetig, aber nicht gleichmäßig stetig, ist.

69. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\colon \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Beweisen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = cx$ mit $c = f(1)$.

Hinweis: Schließen Sie, der Reihe nach, $f(0) = 0$, $f(-x) = -f(x)$, $f(x - y) = f(x) - f(y)$, $f(\frac{1}{n}x) = \frac{1}{n}f(x)$ für $n \in \mathbb{N}_+$ und $f(rx) = rf(x)$ für $r \in \mathbb{Q}$ (insbesondere $f(r) = rf(1)$).

70. Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet $\lfloor x \rfloor = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \,\}$ die größte ganze Zahl n mit $n \leq x$.

(a) Bestimmen Sie (mit Begründung) alle $x_0 \in \mathbb{R}$, in denen die Funktion

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \gamma(x) = x - \lfloor x \rfloor$$

stetig ist.

(b) Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{\gamma(x)} - \gamma(x)$$

auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.