61. Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} z^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (z+i)^n$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$

Hinweis zu (d): Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe, für festes $z \in \mathbb{C}$, direkt mit Hilfe des Quotientenkriteriums.

62. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Finden Sie, auf geeigneten Teilmengen von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, Darstellungen von f als Potenzreihen der Form

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \quad \text{und} \quad \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-2)^n \qquad (a_n, b_n \in \mathbb{C}).$$

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der beiden Potenzreihen.
Hinweis: Geometrische Reihe.

63. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Zeigen Sie, mit Hilfe der ε-δ-Definition der Stetigkeit, dass f an der Stelle -1 stetig ist.

64. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, es seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ stetige Funktionen und es gelte $f(x_0) = g(x_0)$. Zeigen Sie: Ist $h\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für alle $x \in D$ gilt

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x),$$

so ist h stetig in x_0.

65. Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$, und $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ seien stetig in $z_0 \in D$. Zeigen Sie, mit Hilfe der ε-δ-Definition der Stetigkeit, dass auch die Funktion

$$fg\colon \begin{cases} D & \to \mathbb{C}, \\ z & \mapsto f(z)g(z) \end{cases}$$

in z_0 stetig ist.