55. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-5}{n^2+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n-1)^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n n^5$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

56. Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Hinweis: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$ mit geeigneten A, B, $C \in \mathbb{R}$.

57. Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \left(\frac{3}{4}\right)^n \right).$$

(Begründen Sie Ihre Rechenschritte!)

58. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ eine absolut konvergente Reihe. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+1}$$

absolut konvergiert. (*Hinweis:* Vergleichskriterium)

59. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe (mit $a_n \in \mathbb{C}$). Folgt aus der Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$? Folgt umgekehrt aus der Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$? Ändern sich die Antworten, wenn man absolute Konvergenz an Stelle von Konvergenz voraussetzt? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

60. Für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ seien die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2$ absolut konvergent. Zeigen Sie, dass dann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)^2$ absolut konvergent sind.