Bei der Lösung des vorliegenden Blattes können Sie auf das Schulwissen über die ganzen, rationalen und reellen Zahlen sowie über die Mengenlehre zurückgreifen. Wir wiederholen kurz einige Begrifflichkeiten und Notationen.

Mit $\emptyset$ bezeichnen wir die leere Menge. Wir schreiben $x \in A$ wenn x ein Element von A ist, und $x \notin A$ (als Abkürzung für $\neg(x \in A)$) wenn x kein Element von A ist.

Eine Menge A ist *Teilmenge* einer Menge B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist, d.h., wenn gilt $\forall x \in A\colon x \in B$. Wir schreiben $A \subseteq B$ oder $B \supseteq A$.

Zwei Mengen A und B sind *gleich*, kurz $A = B$, wenn gilt $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

Der *Durchschnitt* von zwei Mengen A und B ist definiert als $A \cap B = \{\, x \mid x \in A \wedge x \in B \,\}$, die *Vereinigung* als $A \cup B = \{\, x \mid x \in A \vee x \in B \,\}$ und die *Differenz* als $A \setminus B = \{\, x \in A \mid x \notin B \,\}$.

Für eine Menge A gilt stets $A \notin A$ und $\{A\} \notin A$.

Mit $\mathbb{R}$ bezeichnen wir die Menge der reellen Zahlen, mit $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der ganzen Zahlen und mit

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists a \in \mathbb{Z}\, \exists b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}:\ x = \frac{a}{b} \right\}$$

die Menge der rationalen Zahlen.

6. Es seien p, q und r Aussagen. Zeigen Sie:

(a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$, „Beweis durch Widerspruch”

(b) $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \Rightarrow r]$.

7. Es seien A, B, C und D Mengen. Beweisen Sie

(a) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.

(b) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \setminus D) \cap (C \setminus B)$.

(c) $B \subseteq A \Rightarrow B = A \setminus (A \setminus B)$.

8. X sei eine Menge mit $X \neq \emptyset$ und $X \neq \{\emptyset\}$. Von welchen der folgenden Mengen ist (a) die Menge X, (b) die Menge $\{X\}$, Element oder Teilmenge?

$$\{\{X\}, X\}, \quad X, \quad \emptyset \cap X, \quad \{X\} \setminus \{\{X\}\}, \quad \{X\} \cup X, \quad \{X\} \cup \{\emptyset\}.$$

9. Mit $(0,\infty) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \,\}$ bezeichnen wir die Menge der positiven reellen Zahlen.

(a) Beweisen Sie auf drei verschiedene Arten (direkt, indirekt, durch Widerspruch)

$$\forall x \in (0,\infty)\ \forall y \in (0,\infty)\colon\ x \neq y \ \Rightarrow\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2.$$

(b) Setzen Sie $z = \frac{x}{y}$ und veranschaulichen Sie die Ungleichung geometrisch.

10. (a) Geben Sie präzise Formulierungen von „n ist eine gerade Zahl" und „n ist eine ungerade Zahl", jeweils mit Hilfe des Existenzquantors.

(b) Beweisen Sie

$$\forall n \in \mathbb{Z}\colon\quad n \text{ gerade} \ \Leftrightarrow\ n^2 \text{ gerade}.$$

Hinweis: „$\Leftarrow$" durch indirekten Beweis.

11. Geben Sie für folgende Aussage (a) einen indirekten Beweis (b) einen Beweis unter Benutzung von Aufgabe 6(b):

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon\ xy \notin \mathbb{Q} \ \Rightarrow\ x \notin \mathbb{Q} \lor y \notin \mathbb{Q}.$$