

Auf die folgenden vier Aufgaben sind jeweils 4 Punkte zu erreichen. Die Klausur ist positiv, wenn insgesamt zumindest 8 Punkte erreicht werden.

Notieren Sie auf jedem abgegebenen Blatt Ihren Namen.

Arbeitszeit: 90 + 15 Minuten.

Name:

1. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{3} + 2i \in \mathbb{C}$ über \mathbb{Q} .
2. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 12 eine nicht-triviale normale p -Sylowuntergruppe besitzt.
3. Es sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Zwei Zwischenkörper M und N von $K \subset L$ heißen *konjugiert*, wenn es ein $\sigma \in \text{Gal}_K L$ gibt, so dass gilt $\sigma(M) = N$. Zeigen Sie: Sind M und N konjugierte Zwischenkörper von $K \subset L$, so sind $\text{Gal}_M L$ und $\text{Gal}_N L$ konjugierte Untergruppen von $\text{Gal}_K L$.
4. Es seien $K = \mathbb{Q}(i)$ und $L = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{6})$ Teilkörper von \mathbb{C} . Bestimmen Sie alle Elemente von $\text{Gal}_K L$, und weiters alle Zwischenkörper der Körpererweiterung $K \subset L$. Stellen Sie die Untergruppen von $\text{Gal}_K L$, sowie die Zwischenkörper von $K \subset L$, jeweils in einem Diagramm dar.