Auf die folgenden vier Aufgaben sind jeweils 4 Punkte zu erreichen. Die Klausur ist positiv, wenn insgesamt zumindest 8 Punkte erreicht werden.

Notieren Sie auf jedem abgegebenen Blatt Ihren Namen.

Arbeitszeit: 90 + 30 Minuten.

Name: ....

1. Zeigen Sie, dass das Polynom $X^3 - 2X^2 + X + 2 \in \mathbb{Z}[X]$ irreduzibel ist.

2. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 30 eine nicht-triviale[1] normale p-Sylowuntergruppe besitzt.

3. Es sei K ein Körper und $L \supset K$ eine quadratische Körpererweiterung (d.h. $[L : K] = 2$). Zeigen Sie, dass $L \supset K$ eine normale Körpererweiterung ist.

4. Es sei $\omega \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $X^2 + X + 1 = \frac{X^3-1}{X-1} \in \mathbb{Q}[X]$ und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \omega) \subset \mathbb{C}$. Bestimmen Sie alle Elemente von $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} K$ und weiters alle Zwischenkörper der Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset K$. Stellen Sie die Untergruppen von $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} K$, sowie die Zwischenkörper von $\mathbb{Q} \subset K$, jeweils in einem Diagramm dar.

[1] In der ursprünglichen Klausurangabe fehlte die Voraussetzung “nicht-trivial”.