

1. Es sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung, $r \in \mathbb{N}$, und es seien $u_1, \dots, u_r \in L$ algebraisch über K mit $[K(u_i) : K] = n_i$ für $i \in \{1, \dots, r\}$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\text{kgV}(n_1, \dots, n_r) \leq [K(u_1, \dots, u_r) : K] \leq n_1 \cdots n_r.$$

2. Finden Sie eine unendlich-dimensionale algebraische Körpererweiterung von \mathbb{Q} .

3. Es sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung und $y \in L$ transzendent über K . Mit $K(X)$ bezeichnen wir den Quotientenkörper des Polynomrings $K[X]$. Zeigen Sie: $K(y) \cong K(X)$.

4. Bestimmen Sie für folgende Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ einen Zerfällungskörper über \mathbb{Q} , sowie dessen Körpergrad:

(a) $f = X^3 - 5$,

(b) $g = X^4 - 12X^2 + 35$.

5. Es sei $K \subset L$ eine algebraische Körpererweiterung. Zeigen Sie: Ist R ein Teilring von L mit $K \subset R \subset L$, so ist R bereits ein Körper. (*Hinweis:* Satz 9.7 aus dem Vorlesungsskript.)