1. Finden Sie das Eisenstein'sche Irreduzibilitätskriterium in einem geeigneten Lehrbuch, und formulieren Sie es.

2. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{7} \in \mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$. Finden Sie weiters ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f(\alpha) = \alpha^{-1}$.

3. Es bezeichne $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ den endlichen Körper mit zwei Elementen.

(i) Zeigen Sie, dass $f = X^3 + X + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$ irreduzibel ist.

(ii) Es sei K eine Körpererweiterung von $\mathbb{Z}_2$ mit $K = \mathbb{Z}_2(u)$, so dass $f(u) = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass $\{1, u, u^2\}$ eine $\mathbb{Z}_2$-Basis von K ist, und bestimmen Sie die multiplikative Verknüpfungstafel von K.

4 (Quadratische Körpererweiterungen). Es sei K ein Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Eine Körpererweiterung $K \subset L$ mit $[L : K] = 2$ heißt *quadratische Körpererweiterung*. Zeigen Sie:

(i) Ist $K \subset L$ eine quadratische Körpererweiterung, so gibt es ein $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$ und $\alpha^2 = d \in K^\times$. (Man schreibt dann $L = K(\sqrt{d})$.)

(ii) Die Nebenklasse $d(K^\times)^2$ in $K^\times/(K^\times)^2$ ist durch L eindeutig bestimmt. (Hierbei bezeichnet $(K^\times)^2 = \{\, a^2 \mid a \in K^\times \,\}$ die Menge aller von Null verschiedenen Quadrate in K.)

(iii) Zu jedem $d \in K^\times \setminus (K^\times)^2$ gibt es eine quadratische Körpererweiterung wie oben.

5. Bestimmen Sie alle Unterkörper von $\mathbb{C}$, die isomorph zu $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ sind. (*Hinweis:* Wie verhält sich ein solcher Isomorphismus auf dem Primkörper?)