1. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ ein Euklidischer Bereich ist.

2 (Euklidischer Algorithmus). Es sei R ein Euklidischer Bereich mit einer euklidischen Normfunktion $\delta\colon R\setminus\{0\} \to \mathbb{N}$ wie in Definition 4.3 im Vorlesungsskript.

Es seien a, b in $R \setminus \{0\}$. Die Folge $(r_i)_{i\geq 0}$ in R sei rekursiv definiert durch: $r_0 = a$, $r_1 = b$, und für $i \geq 2$ sei $r_i \in R$, so dass gilt

$$\begin{aligned} r_{i-2} &= q_{i-1}r_{i-1} + r_i && \text{mit } q_{i-1} \in R \text{ und } \delta(r_i) < \delta(r_{i-1}) \text{ falls } r_{i-1} \neq 0, \text{ und} \\ r_i &= 0 && \text{falls } r_{i-1} = 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Es existiert ein minimales $n \geq 0$, so dass für alle $m > n$ gilt $r_m = 0$, und dann ist r_n ein ggT von a und b.

3. Berechnen Sie in $\mathbb{Q}[X]$ einen ggT d von

$$f = 6X^{10} + 23X^8 + 30X^6 + 27X^4 + 14X^2$$

und

$$g = 3X^6 + 10X^4 + 10X^2 + 7.$$

Bestimmen Sie weiters h, $k \in \mathbb{Q}[X]$ mit $d = fh + gk$.

4 (Universelle Eigenschaft des Quotientenkörpers). Es sei R ein Integritätsbereich und k sein Quotientenkörper. Wir identifizieren R mit dem Unterring $\{\, a/1_R \mid a \in R \,\}$ von k. Zeigen Sie:

(i) Ist S ein kommutativer Ring und $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so dass für alle $r \in R \setminus \{0\}$ gilt $f(r) \in S^\times$, dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\overline{f}\colon k \to S$ mit $\overline{f}|_R = f$. Ist $S \neq \mathbf{0}$, so ist $\overline{f}$ injektiv.

(ii) Die im Beweis von Satz 6.7 im Vorlesungsskript behauptete Abbildung $f\colon k \to K$ existiert und ist ein injektiver Ringhomomorphismus.