2. Es sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Bestimmen Sie für jedes Element der Diedergruppe D_n seinen Zentralisator. Zeigen Sie: D_n besitzt $\frac{n+3}{2}$ Konjugationsklassen, wenn n ungerade ist, und $\frac{n+6}{2}$ Konjugationsklassen, wenn n gerade ist.

Beweis: Aus Lemma 3.6 im Vorlesungsskript wissen wir: Die Gruppe D_n wird von zwei Elementen r und d erzeugt, wobei gilt

$$\operatorname{ord}(r) = n, \qquad \operatorname{ord}(d) = 2, \qquad dr = r^{-1}d.$$

Aus demselben Lemma wissen wir

$$D_n = \{\, d^i r^j \mid i \in \{0,1\}, j \in \{0, \dots, n-1\} \}.$$

Zentralisatoren. Sei $a \in D_n$. Wir bestimmen

$$Z(a) = \{\, g \in D_n \mid ag = ga \,\},$$

und unterscheiden dabei zwei Fälle.

Fall 1: $a = r^j$ mit $j \in \{0, \dots, n-1\}$.

Das Element a kommutiert natürlich mit jedem Element aus $\langle r \rangle$. Somit folgt $\langle r \rangle \subset Z(a)$. Wegen $\operatorname{ord}(r) = n$ und $|D_n| = 2n$ ist $(D_n : \langle r \rangle) = 2$. Weil $Z(a)$ eine Untergruppe von D_n ist, gibt es also nur noch zwei Möglichkeiten für $Z(a)$: Entweder ist $Z(a) = \langle r \rangle$ oder es ist $Z(a) = D_n$. Der erste Fall tritt ein, wenn $d \in Z(a)$, der zweite, wenn $d \notin Z(a)$. Wir müssen also nur untersuchen ob d mit a kommutiert.

Es ist

$$da = dr^j = r^{-j}d \quad \text{und} \quad ad = r^j d.$$

Also gilt $da = ad$ genau dann, wenn $r^j = r^{-j}$. Das ist äquivalent zu $r^{2j} = e$ und somit zu $n \mid 2j$. Also ist $j = 0$ oder $j = \frac{n}{2}$, wobei der zweite Fall nur möglich ist, wenn n gerade ist.

Wir haben gezeigt:

$$Z(r^j) = \begin{cases} D_n & \text{falls } j = 0, \text{ oder } n \text{ gerade ist und } j = \frac{n}{2}, \\ \langle r \rangle & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

□

Fall 2: $a = dr^j$ mit $j \in \{0, \dots, n-1\}$.

Sei $g = d^k r^l \in D_n$ mit $k \in \{0,1\}$ und $l \in \{0, \dots, n-1\}$. Ist $k = 0$, so wissen wir bereits aus Fall 1, dass $ga = ag$ genau dann gilt, wenn $l = 0$ oder $l = \frac{n}{2}$, wobei der zweite Fall wieder nur möglich ist, wenn n gerade ist.

Ist andererseits $k = 1$, so ist

$$ga = dr^l dr^j = d^2 rj - l = r^{j-l} \quad \text{und} \quad ag = dr^j dr^l = d^2 r^{l-j} = r^{l-j}.$$

Somit ist $ga = ag$ genau dann, wenn $r^{j-l} = r^{l-j}$. Das ist äquivalent zu $n \mid 2(l-j)$. Das tritt ein, wenn $l = j$ oder $l = j \pm \frac{n}{2}$ (falls n gerade ist; genau eines von $j \pm \frac{n}{2}$ liegt in $\{0, \dots, n-1\}$, abhängig davon ob $j < \frac{n}{2}$ oder $j \geq \frac{n}{2}$).

Wir haben also gezeigt:

$$Z(dr^j) = \begin{cases} \{e, dr^j\} & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ \{e, r^{n/2}, dr^j, dr^{j \pm \frac{n}{2}}\} & \text{falls } n \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

Konjugationsklassen. Für $a \in D_n$ bezeichnen wir mit $C(a)$ die Konjugationsklasse von a. Wir wissen aus Satz 2.9 im Vorlesungsskript: $|C(a)| = (G : Z(a))$. Wir wissen außerdem, das wir die Elemente von $C(a)$ erhalten indem wir a mit allen Elementen eines Repräsentatensystems des Nebenklassenraums $G/Z(a)$ konjugieren.

Sei zuerst wieder $a = r^j$ mit $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Ist $j = 0$ oder $j = \frac{n}{2}$ (falls n gerade ist), so ist $Z(a) = D_n$ und deshalb $C(a) = \{a\}$. Ist andererseits $j \notin \{0, \frac{n}{2}\}$, so ist $|C(a)| = 2$, weil $Z(a) = n$. Wegen

$$dad^{-1} = dad = dr^j d = r^{-j} = a^{-1},$$

ist a^{-1} konjugiert zu a, und somit $C(a) = \{a, a^{-1}\}$.

Wir nehmen nun zuerst an, dass n ungerade ist und betrachten das Element d. Wegen $Z(d) = \{e, dr^j\}$ ist $|C(d)| = n$. Dann muss aber $C(d) = \big\{dr^k \mid k \in \{0, \dots, n-1\}\big\}$ sein, weil die anderen n Elemente von D_n bereits in den uns schon bekannten Konjugationsklassen vorkommen. [1]

Wir nehmen nun an, dass n ungerade ist. Dann ist $|Z(d)| = 4$, und durch Konjugation mit r^k für $k \in \{0, \dots, n-1\}$ erhalten wir

$$C(d) \supset \{r^k d r^{-k} = dr^{-2k} \mid k \in \{0, \dots, n-1\}\} = \{d, dr^2, \dots, dr^{n-2}\}.$$

Wegen $C(d) = \frac{n}{2}$ folgt Gleichheit. Analog gilt

$$C(dr) \supset \{r^k (dr) r^{-k} = dr^{1-2k} \mid k \in \{0, \dots, n-1\}\} = \{dr, dr^3, \dots, dr^{n-1}\},$$

und wieder wegen $|C(dr)| = \frac{n}{2}$ Gleichheit.

Wir fassen zusammen: Ist n ungerade, so sind die Konjugationsklassen von D_n

$$\begin{aligned} &\{e = r^0\}, \\ &\{r, r^{-1}\}, \{r^2, r^{n-2}\}, \dots \ \{r^{\frac{n-1}{2}}, r^{n-\frac{n-1}{2}}\}, \\ &\{d, dr, dr^2, \dots, dr^{n-1}\}, \end{aligned}$$

[1] Das geht auch explizit: Für $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ist $r^k d r^{-k} = dr^{-2k}$, und weil n ungerade ist, ist $\langle r \rangle = \langle r^{-2} \rangle$. Also durchläuft $r^k a r^{-k}$ alle Elemente der Form dr^l mit $l \in \{0, \dots, n-1\}$, und das sind n paarweise verschiedene.

und das sind $1 + \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+3}{2}$ Klassen.

Ist n gerade, so sind die Konjugationsklassen von D_n

$$\begin{aligned}
&\{e = r^0\},\ \{r^{\frac{n}{2}}\},\\
&\{r, r^{-1}\}, \{r^2, r^{n-2}\}, \dots, \{r^{\frac{n}{2}-1}, r^{n-(\frac{n}{2}-1)}\},\\
&\{d, dr^2, \dots, dr^{n-2}\}, \{dr, dr^3, \dots, dr^{n-1}\},
\end{aligned}$$

und das sind $2 + (\frac{n}{2} - 1) + 2 = \frac{n+6}{2}$ Klassen.