1. Es sei G eine Gruppe mit der Eigenschaft, dass $G/Z(G)$ zyklisch ist. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

2. Es sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Bestimmen Sie für jedes Element der Diedergruppe D_n seinen Zentralisator. Zeigen Sie: D_n besitzt $\frac{n+3}{2}$ Konjugationsklassen, wenn n ungerade ist, und $\frac{n+6}{2}$ Konjugationsklassen, wenn n gerade ist.

3. Zeigen Sie, dass die Quaternionengruppe Q nicht isomorph zur Diedergruppe D_4 ist.

4. Es sei $d \in \mathbb{Z}$, so dass d kein Quadrat in $\mathbb{Z}$ ist, und es sei

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{\, a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z} \,\}.$$

Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}$. Als solcher ist er ein Integritätsbereich.

(ii) Es gibt einen Homomorphismus $\mathcal{N} \colon (\mathbb{Z}[\sqrt{d}], \cdot) \to (\mathbb{N}_0, \cdot)$, so dass für alle a, $b \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\mathcal{N}(a + b\sqrt{d}) = |(a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d})| = |a^2 - db^2|.$$

(iii) Für $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ist $\mathcal{N}(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

5. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ euklidisch ist.

6*. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 2014 isomorph zu einer der folgenden ist:

$$\mathbb{Z}_{2014}, \quad \mathbb{Z}_{53} \times D_{19}, \quad \mathbb{Z}_{19} \times D_{53}, \quad D_{1007}.$$