5* (Ein Normalteilerkriterium). Es sei G eine endliche Gruppe und p der kleinste Primteiler von $|G|$. Zeigen Sie: Ist $H \leq G$ eine Untergruppe mit $(G : H) = p$, so ist H ein Normalteiler von G. (*Hinweis*: Lassen Sie G mittels $g*(xH) = gxH$ für alle g, $x \in G$ auf dem Nebenklassenraum G/H operieren.)

Beweis: Wir beobachten zuerst: Ist $xH = yH$ mit x, $y \in H$, so ist $gxH = gyH$ für alle $g \in G$. [Denn: Aus $xH = yH$ folgt $y^{-1}x \in H$. Es ist also $y^{-1}x = y^{-1}g^{-1}gx = (gy)^{-1}(gx) \in H$, und damit $gxH = gyH$.]

Somit können wir eine Abbildung $*\colon G \times G/H \to G/H$ durch $g*(xH) = gxH$ für alle g, $x \in G$ definieren. Für alle x, g, $g' \in G$ ist $e*(xH) = exH = xH$ und $g'*(g*xH) = g'*(gxH) = g'gxH = (g'g)*xH$. Damit ist $*$ eine Operation von G auf G/H.

Aus Übung 4 erhalten wir einen Homomorphismus $\sigma\colon G \to \mathrm{Perm}(G/H)$, wobei für alle g, $x \in G$ gilt: $\sigma(g)(xH) = g*xH = gxH$. Dabei gilt:

1. $\ker(\sigma) \subset H$, [1] [Beweis: Sei $g \in \ker(\sigma)$. Dann gilt $gxH = \sigma(g)(xH) = xH$ für alle $x \in G$. Insbesondere, mit $x = e$, folgt $gH = H$ und somit $g \in H$.]

2. $|\mathrm{Perm}(G/H)| = p!$. [Nach Voraussetzung ist $(G : H) = p$, und somit $\mathrm{Perm}(G/H) \cong S_p$.]

Wegen $G/\ker(\sigma) \cong \sigma(G)$ und weil $\sigma(G)$ eine Untergruppe von $\mathrm{Perm}(G/H)$ ist, liefert der Satz von Lagrange also:

$$(G : H) = p \;\big|\; (G : \ker(\sigma)) \;\big|\; p! = p(p-1)\cdots 2 \cdot 1.$$

Außerdem teilt $(G : \ker(\sigma))$ auch $|G|$, und somit gilt $(G : \ker(\sigma)) \mid \mathrm{ggT}(p!, |G|)$. Weil p der kleinste Primteiler von $|G|$ ist, und jeder Primteiler von $\frac{p!}{p} = (p-1)!$ echt kleiner ist als p, ist $\mathrm{ggT}(p!, |G|) = p$. Damit ist $p = (G : \ker(\sigma))$. Wegen $\ker(\sigma) \subset H \subset G$ ist also $\ker(\sigma) = H$. Somit ist H ein Normalteiler von G und das war zu zeigen. $\square$

Bemerkung. Ist $p = 2$ und $p \mid |G|$, so ist p natürlich schon der kleinste Primteiler von $|G|$. Wir erhalten als Spezialfall das aus der Einführung in die Algebra bekannte Resultat: Ist $H \leq G$ eine Untergruppe vom Index 2, so ist H ein Normalteiler von G.

[1] Genauer gilt $\ker(\sigma) = \bigcap_{x \in H} xHx^{-1}$, das ist der so genannte *normale Kern* von H in G. Am einfachsten zeigt man dazu, im allgemeineren Setting von Beispiel 4, dass gilt $\ker(\sigma) = \bigcap_{m \in M} G_m$. Mit der Operation in Beispiel 5 ist dann $G_{xH} = \{\, g \in G \mid gxH = xH \,\}$. Wegen $gxH = xH \Leftrightarrow x^{-1}gx \in H \Leftrightarrow g \in xHx^{-1}$ folgt $G_{xH} = xHx^{-1}$.