1. Zeigen Sie: A_4 besitzt keine Untergruppe der Ordnung 6.

Die folgenden Beispiele behandeln *Gruppenoperationen.*

Definition Es sei G eine Gruppe und $\emptyset \neq M$ eine Menge. Eine *(Links-)Operation von G auf M* ist eine Abbildung

$$*\colon G \times M,\ (g, m) \to g * m,$$

so dass für alle g, $g' \in G$ und $m \in M$ gilt:

(i) $(g'g) * m = g' * (g * m)$,

(ii) $e * m = m$.

Für $m \in M$ nennt man $Gm = \{\, g * m \mid g \in G \,\} \subset M$ die *Bahn (auch: Orbit) von m* unter der Operation von G, und $G_m = \{\, g \in G \mid g * m = m \,\} \subset G$ den *Stabilisator (auch: Isotropiegruppe, Fixgruppe) von m.*

$G \setminus M = \{\, Gm \mid m \in M \,\}$ ist der *Bahnenraum.* Die Bahnen sind die Äquivalenzklassen der folgenden Äquivalenzrelation auf M: Für m, $m' \in M$ gilt $m \sim m'$ genau dann, wenn ein $g \in G$ mit $g * m = m'$ existiert. Eine Familie $(m_i)_{i \in I}$ in M für die gilt, dass $G \setminus M$ disjunkte Vereinigung der Gm_i ist, heißt *Repräsentantensystem* des Bahnenraums.

2 (Bahnengleichung). Es sei G eine Gruppe, $\emptyset \neq M$ eine Menge und $*\colon G \times M \to M$ eine Operation von G auf M. Zeigen Sie:

(i) Für alle $m \in M$ ist G_m ist eine Untergruppe von G und $(G : G_m) = |Gm|$.

(ii) Es sei $(m_i)_{i \in I}$ ein Repräsentantensystem des Bahnenraums. Dann gilt

$$|M| = \sum_{i \in I} (G : G_{m_i}).$$

3. Geben Sie (kurze) Beweise für die Sätze 2.9 und 2.13 aus dem Vorlesungsskript, indem Sie geeignete Gruppenoperationen verwenden.

4. Es sei G eine Gruppe, $\emptyset \neq M$ eine Menge und $*\colon G \times M \to M$ eine Operation von G auf M. Für $g \in G$ sei $\sigma_g\colon M \to M$ definiert durch $\sigma_g(m) = g * m$. Zeigen Sie: Es gibt einen Homomorphismus $\sigma\colon G \to \mathrm{Perm}(M)$ mit $\sigma(g) = \sigma_g$.

5* (Ein Normalteilerkriterium). Es sei G eine endliche Gruppe und p der kleinste Primteiler von $|G|$. Zeigen Sie: Ist $H \leq G$ eine Untergruppe mit $(G : H) = p$, so ist H ein Normalteiler von G. (*Hinweis*: Lassen Sie G mittels $g * (xH) = gxH$ für alle g, $x \in G$ auf dem Nebenklassenraum G/H operieren.)