1. Zeigen Sie: Eine Gruppe der Ordnung 63 kann nicht einfach sein.

2. Finden Sie eine 2-Sylowuntergruppe und eine 3-Sylowuntergruppe von S_4. Wie viele 2-Sylowuntergruppen, beziehungsweise 3-Sylowuntergruppen, gibt es?

3. Für eine endlich abelsche Gruppe G und eine Primzahl p sei

$$G(p) = \{\, a \in G \mid a^{p^k} = e \text{ für ein } k \geq 0 \,\}.$$

Zeigen Sie:

(i) $G(p)$ ist eine Untergruppe von G.

(ii) Ist $G = A \cdot B$ (dir), so ist $G(p) = A(p) \cdot B(p)$ (dir).

(iii) $G(p)$ ist die eindeutig bestimmte p-Sylowuntergruppe von G.

4. Es seien $p < q$ Primzahlen und es sei G eine Gruppe mit $|G| = p^2q^2$. Zeigen Sie: Ist $|G| \neq 36$, so besitzt G eine normale Sylowuntergruppe.

5. Zeigen Sie: Eine Gruppe der Ordnung 36 kann nicht einfach sein. (*Hinweis*: Es bezeichne $\mathrm{Syl}_3(G)$ die Menge der 3-Sylowuntergruppen von G. Durch Konjugation erhält man einen Homomorphismus $G \to \mathrm{Perm}(\mathrm{Syl}_3(G))$.)