1. Stellen Sie folgende Permutationen als Produkte disjunkter Zykeln dar:

(a) $\pi = (3\,2)(4\,3)(1\,4)$,

(b) $\rho = (3\,4\,1)(1\,2)$,

(c) $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6)^2$,

(d) $\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Bestimmen Sie jeweils die Ordnung und das inverse Element.

2. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq n$. Es sei $\sigma = (a_1\, a_2\, \cdots\, a_k) \in S_n$ ein k-Zykel. Zeigen Sie, dass für alle $\tau \in S_n$ gilt

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a_1)\,\tau(a_2)\,\cdots\,\tau(a_k)).$$

Insbesondere kommutieren disjunkte Zykeln.

3. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass gilt

$$S_n = \langle\{(1\,k) \mid 2 \leq k \leq n\}\rangle = \langle\{(k\,k+1) \mid 1 \leq k \leq n-1\}\rangle = \langle(1\,2), (1\,2\,\cdots\,n)\rangle.$$

(*Hinweis:* Korollar 1.8 im Skriptum.)

4. Zeigen Sie, dass

$$V = \{(), (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$$

ein Normalteiler von S_4 ist. Schließen Sie: Es gibt einen Normalteiler N von V, so dass N kein Normalteiler von S_4 ist.