Es sei $R = (R, +, \cdot)$ ein Ring. Der *Gegenring von* R, $R^{\mathrm{op}} = (R, +, \cdot_{\mathrm{op}})$, ist wie folgt definiert: Die zugrundeliegende Menge ist R, die Addition ist jene von R, aber die Multiplikation in R^{op} ist gegeben durch $\lambda \cdot_{\mathrm{op}} \mu = \mu \cdot \lambda$ für alle λ, $\mu \in R$. Mit dieser Definition ist R^{op} ein Ring mit Einselement $1_{R^{\mathrm{op}}} = 1_R$.

1. Zeigen Sie: Ist M ein R-Rechtsmodul, so ist M ein R^{op}-Linksmodul, wobei die R^{op}-Linksmodulstruktur auf M durch $\lambda a = a\lambda$ für alle $a \in M$ und $\lambda \in R^{\mathrm{op}}$ gegeben ist.

2. Es sei R ein Ring und M ein R-Modul. Es sei

$$\mathrm{Ann}(M) = \{ \lambda \in R \mid \lambda a = 0 \text{ für alle } a \in M \}.$$

Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{Ann}(M)$ ist ein Ideal von R.

(ii) Es sei $I \subset R$ ein Ideal von R mit $I \subset \mathrm{Ann}(M)$. Durch

$$R/I \times M \to M, \quad (\lambda + I, a) \mapsto \lambda a$$

wird auf M eine R/I-Modulstruktur definiert.

3. Welche der folgenden Moduln sind frei?

(a) $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Modul.

(b) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul für $n \in \mathbb{N}$.

(c) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul für $n \in \mathbb{N}$.

(d) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$-Modul für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. (Die Modulstruktur ist hier wie in Übung 2 zu verstehen.)

(e) Für einen Ring R, der R-Modul $M_{m,n}(R)$ der $m \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in R. (Hierbei ist die R-Modulstruktur durch $\lambda(a_{i,j})_{i,j} = (\lambda a_{i,j})_{i,j}$ gegeben.)

Es sei R ein Ring und M ein R-Modul. Die Menge

$$\mathrm{End}_R(M) = \{ f \mid f\colon M \to M \text{ ist ein } R\text{-Modulhomomorphismus} \}$$

der R-Modulendomorphismen von M wird mit der elementweisen Addition, $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ für f, $g \in \mathrm{End}_R(M)$ und $a \in M$, und der Hintereinanderausführung als Multiplikation, zum Ring mit Einselement $\mathrm{id}\colon M \to M$.

4. Es sei R ein Ring und F ein freier R-Modul auf einer abzählbar unendlichen Menge $\{e_1, e_2, e_3, ...\}$. Es sei $S = \mathrm{End}_R(F)$ der Ring der R-Modulendomorphismen von F. Zeigen Sie: Es ist $S \cong S \oplus S$ (als S-Moduln).

Hinweis: Zeigen Sie, dass die beiden Elemente f, $g \in S$ mit

$$f(e_{2i}) = e_i, \quad f(e_{2i-1}) = 0_F,$$

und

$$g(e_{2i}) = 0_F, \quad g(e_{2i-1}) = e_i,$$

für $i \in \mathbb{N}$, eine S-Basis (d.h. ein linear unabhängiges Erzeugendensystem) des S-Moduls S bilden.