1. Welche der folgenden Gleichungen sind über $\mathbb{Q}$ durch Radikale auflösbar?

(a) $x^6 + 2x^3 + 1 = 0$,

(b) $3x^5 - 15x + 5 = 0$,

(c) $x^5 - x^4 - 16x + 16 = 0$.

Beweis: (a) Es sei $f = x^6 + 2x^3 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Es ist

$$f = (x^3 + 1)^2 = \big((x+1)(x^2 - x + 1)\big)^2.$$

Das Polynom $x^2 - x + 1$ ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$ (weil nullstellenfrei). Sei $K = \mathbb{Q}(u)$ mit $u^2 - u + 1 = 0$. Dann ist K wegen $u^3 = -1$ eine Radikalerweiterung von $\mathbb{Q}$ und somit f über $\mathbb{Q}$ durch Radikale auflösbar.

(b) Es sei $g = 3x^5 - 15x + 5 \in \mathbb{Q}[x]$. Nach dem Eisenstein'schen Irreduzibilitätskriterium, mit $p = 5$, ist g irreduzibel über $\mathbb{Z}$, und mit dem Lemma von Gauss auch über $\mathbb{Q}$. Wir führen für die von g induzierte Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Kurvendiskussion durch, um die Nullstellen in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ zu untersuchen. Es ist $g' = 15(x^4 - 1)$ und $g'' = 60x^3$. Die Nullstellen von g' sind ± 1 und $\pm i$, und es ist $g''(-1) < 0$ und $g''(1) > 0$. Also hat g ein lokales Maximum an der Stelle -1 und ein lokales Minimum an der Stelle 1. Weiters ist $g(-1) = 17 > 0$ und $g(1) = -7 < 0$, und außerdem $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$ sowie $\lim_{t\to-\infty} g(t) = -\infty$.

Damit hat g also drei reelle Nullstellen und ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen. Wir schließen nun gleich wie in Beispiel 15.4 im Vorlesungsskript: Ist K ein Zerfällungskörper von g über $\mathbb{Q}$, und $u \in K$ eine Nullstelle von g, so ist $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 5$. Damit ist also 5 ein Teiler von $[K : \mathbb{Q}] = \operatorname{Gal}_{\mathbb{Q}} K$. Deshalb enthält $\operatorname{Gal}_{\mathbb{Q}} K$, die wir mit einer Untergruppe von S_5 identifizieren, ein Element der Ordnung 5, also einen 5-Zykel. Durch Einschränkung der komplexen Konjugation auf K erhalten wir eine Transposition. Damit ist die Galoisgruppe aber ganz S_5. Die Gruppe S_5 ist nicht auflösbar (Satz 15.3), und deshalb ist auch g nicht durch Radikale auflösbar (Kriterium von Galois, Satz 15.1).

(c) Es sei $h = x^5 - x^4 - 16x + 16 \in \mathbb{Q}[x]$. Man sieht sofort $h(1) = 0$. Weitere Nullstellen in $\mathbb{Q}$ müssen von der Form ± 1, ± 2, ± 4, ± 8, ± 16 sein (Blatt 7, Übung 2). Durch Einsetzen findet man $h(2) = h(-2) = 0$. Sukzessives Abdividieren ergibt

$$h = (x-1)(x-2)(x+2)(x^2+4)$$

Dieses Polynom zerfällt in $\mathbb{Q}(i)$ in Linearfaktoren, und wegen $i^2 = -1$ ist dies offensichtlich eine Radikalerweiterung von $\mathbb{Q}$. Damit ist h durch Radikale auflösbar. $\square$

Die Teile (a) und (c) kann man durch einige theoretische Überlegungen abkürzen:

- Sind f, $g \in K[x]$ durch Radikale auflösbar, so gilt das auch für fg.
- Ist G eine auflösbare Gruppe, und H eine Untergruppe von G, so ist auch H auflösbar. (Beweisidee: In einer Kette von Untergruppen von G wie in der Definition der Auflösbarkeit jede Untergruppe mit H schneiden.)
- Für $n \leq 4$ ist S_n auflösbar. Nach Korollar 13.8 ist damit, über einem Körper der Charakteristik 0, jedes Polynom von Grad höchstens 4 durch Radikale auflösbar.

Damit ist (a) offensichtlich, denn $f = (x^3 + 1)^2$. In (c) genügt die Beobachtung $h(1) = 0$, denn dann ist $h = (x - 1)h_0$ mit $\deg(h_0) = 4$.

Für den letzten Teil von (b) kann man allgemeiner mit dem gleichen Argument z.B. zeigen: Ist $f \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel mit $\deg(f) = p \in \mathbb{P}$, und hat f genau $p - 2$ reelle Nullstellen, so ist die Galoisgruppe von f ganz S_p. Dass p prim ist braucht man dabei an zwei Stellen: Zuerst um ein Element der Ordnung p zu finden (Satz von Cauchy, Korollar 2.2). Dann später im Beweis, damit für den p-Zykel auch die k-ten Potenzen für $p \nmid k$ noch immer p-Zykel sind.