1. Welche der folgenden Gleichungen sind über $\mathbb{Q}$ durch Radikale auflösbar?

(a) $x^6 + 2x^3 + 1 = 0$,

(b) $3x^5 - 15x + 5 = 0$,

(c) $x^5 - x^4 - 16x + 16 = 0$.

2 (Artin-Schreier Erweiterungen). Es sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$, und es sei $K_0 \subset K$ der Primkörper. Zeigen Sie:

(i) Besitzt das Polynom $f = X^p - X + a \in K[X]$ eine Nullstelle in K, so zerfällt es in Linearfaktoren. (*Hinweis*: Ist u eine Nullstelle von f, so auch $u + v$ für alle $v \in K_0$.)

(ii) Es sei L ein Erweiterungskörper von K, $u \in L$, und $g \in K[X]$, sodass für eine Menge $\emptyset \subsetneq N \subsetneq K_0$ gilt:

$$g = \prod_{v \in N} (X - (u + v)) \in L[X].$$

Dann ist $u \in K$. (*Hinweis*: Die Koeffizienten von g liegen in K.) Insbesondere: Besitzt f keine Nullstelle in K, so ist f irreduzibel.

(iii) Besitzt f keine Nullstelle in K, und ist L ein Zerfällungskörper von f, so ist $\mathrm{Gal}_K L \cong \mathbb{Z}_p$ und die Erweiterung $L \supset K$ galoissch.

3. $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ ist die triviale Gruppe.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass ein Automorphismus von $\mathbb{R}$ monoton sein muss.

4*. Es sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle Zwischenkörper der Erweiterung $\mathbb{Q} \subset K$.

Hinweis: Es gibt zumindest zwei Lösungswege. Einmal mit dem Fundamentalsatz der Galoistheorie und einmal (fast) ohne. In keinem Fall können Sie den Fundamentalsatz aber auf die Erweiterung $\mathbb{Q} \subset K$ anwenden.