4. Es sei L eine Galoiserweiterung eines Körpers K, wobei L Zerfällungskörper eines irreduziblen Polynom $f \in K[X]$ sei. Es sei weiters $\mathrm{Gal}_K L$ abelsch. Zeigen Sie: Für jede Nullstelle $a \in L$ von f ist $L = K(a)$.

Beweis: Es sei a eine Nullstelle von f in L. Wir betrachten den Zwischenkörper $K \subset K(a) \subset L$. Weil L/K galoissch ist, folgt aus dem Fundamentalsatz der Galoistheorie, dass es eine Untergruppe H von $\mathrm{Gal}_K L$ gibt mit $K(a) = L_H$. Weil $\mathrm{Gal}_K L$ abelsch ist, ist H ein Normalteiler von $\mathrm{Gal}_K L$. Nach Teil (2) des Fundamentalsatzes der Galoistheorie ist damit die Körpererweiterung $K(a) \supset K$ normal. Das irreduzible Polynom $f \in K[X]$ besitzt eine Nullstelle in $K(a)$ (nämlich a), und zerfällt damit aufgrund der Normalität der Körpererweiterung in Linearfaktoren. Also ist $K(a)$ schon ein Zerfällungskörper von f über K, und wegen $K(a) \subset L$ deshalb $L = K(a)$. $\square$