5. Es seien $p_1, \dots, p_r$ paarweise verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie:

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_r}) : \mathbb{Q}] = 2^r.$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage durch Induktion. Aber versucht man das direkt, so bleibt man an einer Stelle stecken, weil für diese Stelle die Induktionsvoraussetzung zu schwach ist! Wir zeigen also stattdessen folgendes etwas allgemeinere Resultat: Es sei $r \in \mathbb{N}$ und es seien $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ paarweise teilerfremd mit $n_i \notin \mathbb{Q}^2$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$. Dann gilt

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, \dots, \sqrt{n_r}) : \mathbb{Q}] = 2^r.$$

Die Ungleichung $[\mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, \dots, \sqrt{n_r}) : \mathbb{Q}] \leq 2^r$ folgt aus Blatt 9, Übung 1. (Für alle $i \in \{1, \dots, r\}$ ist $\mathbb{Q}(\sqrt{n_i}) : \mathbb{Q}] = 2$.)

Wir zeigen Gleichheit durch Induktion nach r. Der Fall $r = 1$ ist klar. Sei also $r \geq 2$. Wir definieren $K = \mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, \dots, \sqrt{n_{r-2}})$, $a = n_{r-1}$, $b = n_r$ und betrachten die Körpererweiterung $K(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ über $K(\sqrt{a})$.

Behauptung: $[K(\sqrt{a}, \sqrt{b}) : K(\sqrt{a})] = 2$. Angenommen, das wäre nicht so. Dann ist $K(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = K(\sqrt{a})$, und deshalb

$$\sqrt{b} = \alpha + \beta\sqrt{a}$$

mit α, $\beta \in K$. Dann ist aber

$$b = (\alpha^2 + \beta^2 a) + 2\alpha\beta\sqrt{a}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $\sqrt{a} \notin K$ (denn sonst wäre $[\mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, \dots, \sqrt{n_{r-2}}, \sqrt{a}) : \mathbb{Q}] < 2^{r-1}]$), und damit sind 1 und $\sqrt{a}$ linear unabhängig über K. Also muss $2\alpha\beta = 0$, und somit $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$, gelten. Aus $\beta = 0$ würde aber folgen $\sqrt{b} \in K$, was ebenfalls nach Induktionsvoraussetzung nicht sein kann (denn sonst wäre $[\mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, \dots, \sqrt{n_{r-2}}, \sqrt{b}) : \mathbb{Q}] < 2^{r-1}]$).

Somit ist $\alpha = 0$ und deshalb $\sqrt{b} = \beta\sqrt{a}$. Wegen $\beta \in K$ und $a\beta = \sqrt{ab}$ ist $K = K(\beta) = K(\sqrt{ab})$. Aber dann ist

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, \dots, \sqrt{n_{r-2}}, \sqrt{ab}) : \mathbb{Q}] < 2^{r-1},$$

im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung. (Dieser letzte Schluss hätte bei einer Induktion direkt mit der Aussage des Beispiels nicht mehr funktioniert. Das Produkt ab ist ja keine Primzahl. Wir brauchen hier also für $r - 1$ wirklich die stärkere Aussage.) $\square$