1. Es sei R ein kommutativer Ring mit Charakteristik $p \in \mathbb{P}$. Zeigen Sie:

(i) Für $a, b \in R$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}.$$

(*Hinweis:* Betrachten Sie zuerst den Fall $n = 1$.)

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $A_n = \{ a \in R \mid a^{p^n} = a \}$ ein Teilring von R.

2* (Endliche Körper). Wir klassifizieren bis auf Isomorphie alle endlichen Körper. Zeigen Sie dazu:

(i) Ist K ein endlicher Körper, so ist $\mathrm{char}(K) = p$ eine Primzahl und $|K| = p^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Es sei p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}$, und K der Zerfällungskörper von $X^{p^n} - X$ über $\mathbb{Z}_p$. Dann ist $|K| = p^n$.

(iii) Sind K_1 und K_2 endliche Körper mit $|K_1| = |K_2|$, so gilt $K_1 \cong K_2$. (*Hinweis:* Charakterisieren Sie K_i als Zerfällungskörper eines geeigneten Polynoms über dem Primkörper von K_i.)

Für den, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten, Körper mit p^n Elementen schreibt man oft $\mathbb{F}_{p^n}$.

3. Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass für alle algebraischen Körpererweiterungen $K \subset M \subset L$ gilt:

(a) Wenn L normal über K ist, so ist auch M normal über K.

(b) Wenn L normal über K ist, so ist auch L normal über M.

(c) Wenn M normal über K ist und L normal über M ist, so ist auch L normal über K.

4. Es sei L ein Zerfällungskörper von $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ über $\mathbb{Q}$. Finden Sie ein $u \in L$ mit $L = \mathbb{Q}(u)$.

5*. Es sei $r \in \mathbb{N}$ und es seien $p_1, \dots, p_r$ paarweise verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie:

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_r}) : \mathbb{Q}] = 2^r.$$