

Elementare Zahlentheorie (VU) – Sommersemester 2022

Nachklausur – 7.10.2022

- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt (die erste Aufgabe können Sie am Deckblatt lösen).
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihren Gruppenleiter!

Name:

Matrikelnr.:

Gruppe: ☐ 1 (Smertnig, früh) ☐ 2 (Fripertinger) ☐ 3 (Smertnig, spät) ☐ 4 (Fadinger)

Pro Aufgabe sind **2 Punkte** zu erreichen. Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (Kurzfragen) (a) (1 P.)

(b) (1 P.) Kreuzen Sie diejenigen Aussagen an, die für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gelten. (Ohne Beweis)

- ☐ $\text{ggT}(a, b, c) = \text{ggT}(a, \text{ggT}(b, c))$.
- ☐ Aus $\text{ggT}(a, b, c) = 1$ folgt $\text{ggT}(a, b) = 1$.
- ☐ Aus $\text{ggT}(a, b) = 1$ folgt $\text{ggT}(a, b, c) = 1$.
- ☐ $\text{ggT}(a, b) \text{ kgV}(a, b) = |ab|$.
- ☐ Ist $d = \text{ggT}(a, b)$, so gilt $a \mid bc$ genau dann, wenn $a \mid dc$.

(c) (1 P.) Bestimmen Sie

$$(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times = \{\bar{1}, \quad \quad \quad \}.$$

Aufgabe 2 (2 P.)

Welchen Rest lässt 7^{578} by Division durch 9?

Aufgabe 3 (2 P.)

Seien $m, m' \in \mathbb{N}$ und seien weiters $a, a', b, b', x \in \mathbb{Z}$, so dass gilt

$$ax \equiv b \pmod{m} \quad \text{und} \quad a'x \equiv b' \pmod{m'}.$$

Zeigen Sie: Es gilt $ab' \equiv a'b \pmod{d}$, wobei $d := \text{ggT}(m, m')$.

Aufgabe 4 (2 P.)

Formulieren (1 P.) und beweisen (1 P.) Sie **einen** der folgenden beiden Sätze:

- Fundamentalsatz der Arithmetik;
- Chinesischer Restsatz (für Kongruenzen).