Aufgabe 42. Lösen Sie die folgenden Kongruenzen.

(a) $102X \equiv 189 \mod 321$,

(b) $589X \equiv 209 \mod 817$.

Aufgabe 43. (a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$, für die gilt

$$x \equiv 4 \mod 7, \quad x \equiv 5 \mod 11 \quad \text{und} \quad x \equiv 2 \mod 13.$$

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$, für die gilt

$$5x \equiv 13 \mod 33 \quad \text{und} \quad 2x \equiv 4 \mod 12.$$

(*Hinweis:* Faktorisieren Sie die Moduln. Liegt eine Kongruenz der Form $ax \equiv b \mod m$ mit $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$ vor, so können Sie ein $y \in \mathbb{Z}$ mit $ay \equiv 1 \mod m$ finden und die Kongruenz äquivalent zu $x \equiv yb \mod m$ umformen.)

Aufgabe 44. Sei $a \in \mathbb{N}$ mit g-adischer Zifferndarstellung

$$a = \sum_{i=0}^{k} a_i g^i,$$

wobei $k \geq 0$ und $a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0, g-1]$. (Der Fall $g = 10$ entspricht der Dezimaldarstellung der Zahl a; $g = 2$ der Binärdarstellung)

Die (g-*adische*) *Ziffernsumme* von a ist $Z(a) := a_k + \cdots + a_1 + a_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i$, die *alternierende* ($g$-*adische*) *Ziffernsumme* ist $A(a) := a_0 - a_1 + \cdots \pm a_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i a_i$. (Wir setzen voraus, dass bekannt ist, dass die g-adischen Ziffern durch die Zahl a eindeutig bestimmt sind ohne dies hier zu problematisieren.) Zeigen Sie:

(a) Ist d ein Teiler von $g - 1$, so gilt $d \mid a \Leftrightarrow d \mid Z(a)$.

(b) Ist d ein Teiler von $g + 1$, so gilt $d \mid a \Leftrightarrow d \mid A(a)$.

(c) Ist d ein Teiler von g^l für ein $0 \leq l \leq k$, so gilt $d \mid a \Leftrightarrow d \mid \sum_{i=0}^{l-1} a_i g^i$.

(d) Leiten Sie für $g = 10$ und $d \in \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11\} = [2, 11] \setminus \{7\}$ Teilbarkeitsregeln für die Teilbarkeit durch d her.

(*Hinweis:* Kongruenzrechnung modulo d. Versuchen Sie es selbst; es ist nicht schwer. Falls Sie doch steckenbleiben, können Sie sich am Skriptum orientieren.)

Bonus: Können Sie eine Teilbarkeitsregel ähnlicher Art für $d = 7$ finden?

Aufgabe 45. Eine Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ heißt *periodisch*, falls es eine positive ganze Zahl q gibt mit $x_{n+q} = x_n$ für alle $n \geq 0$. (Man nennt q dann eine *Periode* der Folge.)

(a) Sei m eine natürliche Zahl, und $\pi_m\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $a \mapsto \overline{a}$. Nach Definition der Verknüpfungen auf $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, gelten dann $\pi_m(a+b) = \pi_m(a) + \pi_m(b)$, $\pi_m(ab) = \pi_m(a)\pi_m(b)$ und $\pi_m(1) = \overline{1}$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$; die Abbildung π_m ist ein *Ringhomomorphismus.*

Zeigen Sie, die Folge $(\overline{F}_n)_{n\geq 0}$ der modulo m berechneten Fibonacci Zahlen $\overline{F}_n = \pi_m(F_n)$, $n \geq 0$, besitzt ebenfalls eine rekursive Darstellung und ist periodisch.

(b) Folgern Sie aus (a), dass es zu jeder Primzahl p unendlich viele Fibonacci Zahlen gibt, die Vielfache von p sind. (Das bedeutet insbesondere, dass jede Primzahl als Teiler von Fibonacci Zahlen F_n, $n \geq 1$, auftritt.)

(c) Sei $L(m)$ die kleinste Periode der Folge der Fibonacci Zahlen modulo m. Bestimmen Sie $L(2)$, $L(3)$ und $L(5)$.