Aufgabe 38. (a) Bestimmen Sie das kleinste Paar natürlicher Zahlen $k < l$ mit $2^k \equiv 2^l \mod 100$. (Warum muss es ein solches Paar jedenfalls geben?)

(b) Mit $d = l - k$ gilt: $2^{nd+e} \equiv 2^e \mod 100$ für alle $n \geq 0$ und $e \geq k$.

(c) Bestimmen Sie die letzten beiden Dezimalziffern von $M_{521} = 2^{521} - 1$.

Aufgabe 39. Sei p eine ungerade Primzahl und $n \in [0, p-1]$. Zeigen Sie:

$$\binom{p-1}{n} \equiv (-1)^n \mod p.$$

Aufgabe 40. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $3^m + 3^n + 1$ kein Quadrat sein kann. (*Hinweis:* Arbeiten Sie modulo 8.)

Aufgabe 41. Sei $p \in \mathbb{P}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$(1+p)^{p^{n-1}} \equiv 1 \mod p^n.$$

(*Hinweis*: Induktion nach n.)