**Aufgabe 33.** Bestimmen Sie (ohne Taschenrechner bzw. Computer) jeweils die kleinste Zahl $r \in \mathbb{N}_0$, welche die folgende Kongruenz erfüllt.

(a) $9 \cdot 124 + 45 - 1111 \equiv r \mod 11$,

(b) $(-179) \cdot 24^2 - 92 \equiv r \mod 20$,

(c) $8^{29} + 3^6 \equiv r \mod 9$.

*Hinweis:* Ersetzen Sie auftretende Faktoren und Summanden durch betragsmäßig möglichst kleine, dazu kongruente, Zahlen. Zum Beispiel $9 \equiv -2 \mod 11$.

**Aufgabe 34.** Bestimmen Sie (ohne Taschenrechner bzw. Computer) die letzte Dezimalziffer von $3^{800}$ und von $2^{1000}$.

**Aufgabe 35.** Seien $a, b, n \in \mathbb{N}_0$. Ist $n = 100b + a$, so ist $n$ genau dann durch 7 teilbar, wenn 7 ein Teiler von $a + 2b$ ist.

**Aufgabe 36.** Was ist die kleinste natürliche Zahl die durch 15 teilbar ist, und deren Dezimalziffernsumme 15 ergibt?

**Aufgabe 37.** Sei $p \in \mathbb{P}$ und $k \in [0, p]$.

(a) Zeigen Sie:

$$p \mid \binom{p}{k} \Leftrightarrow 1 \leq k < p.$$

(b) Sind $a, b \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$(a + b)^p \equiv a^p + b^p \mod p.$$