Aufgabe 29. Bestimmen Sie die Primfaktorenzerlegungen der folgenden beiden Zahlen a und b, und bestimmen Sie damit weiters $\operatorname{ggT}(a, b)$ und $\operatorname{kgV}(a, b)$ (Darstellung als Produkte von Primzahlen genügt).

$$a = 3702600 \qquad\qquad b = 12799215.$$

Aufgabe 30. Sei P die Menge aller Primzahlen, die eine Fibonacci-Zahl teilen. Zeigen Sie, dass P unendlich ist. (Damit erhalten Sie insbesondere einen weiteren Beweis dafür, dass es unendlich viele Primzahlen gibt; Aufgabe 7 könnte nützlich sein).

Aufgabe 31. Seien $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $p \in \mathbb{P}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{v}_p(a) = \max\{\, k \in \mathbb{N}_0 : p^k \mid a \,\}$.

(b) $\mathrm{v}_p(ab) = \mathrm{v}_p(a) + \mathrm{v}_p(b)$.

(c) $\mathrm{v}_p(a + b) \geq \min\{\mathrm{v}_p(a), \mathrm{v}_p(b)\}$ falls $a + b \neq 0$.

Aufgabe 32. Ein Zahlenkünstler und eine Versuchsperson vereinbaren eine natürliche Zahl n. Die Versuchsperson denkt sich dann eine Zahl $1 \leq m < n$, die der Zahlenkünstler erraten soll. Dafür darf er beliebige natürliche Zahlen k vorgeben, wobei die Versuchsperson ihm mitteilt, ob $m + k$ prim ist oder nicht. Spätestens nach Angabe von $n - 1$ Zahlen k kann der Zahlenkünstler die Zahl m angeben. Wie könnte er vorgehen? (Satz 2.10 ist hilfreich.)