

Aufgabe 27. Sei $M = \{7n + 1 : n \in \mathbb{N}_0\}$ die Menge aus Aufgabe 12.

- Ein Element $a \in M \setminus \{1\}$ heißt *M-irreduzibel*, wenn für alle $b, c \in M$ gilt:

$$a = bc \quad \Rightarrow \quad b = 1 \text{ oder } c = 1.$$

- Ein Element $a \in M \setminus \{1\}$ heißt *M-prim*, wenn für alle $b, c \in M$ gilt:

$$a \mid_M bc \quad \Rightarrow \quad a \mid_M b \text{ oder } a \mid_M c.$$

Zeigen Sie:

- (a) Jedes *M*-prime Element ist *M*-irreduzibel.
- (b) Es gibt *M*-irreduzible Elemente die nicht *M*-prim sind (Hinweis: Betrachten Sie z.B. 36^2).

Lösung.

(a) Sei $a \in M$ ein *M*-primes Element. Sei $a = bc$ mit $b, c \in M$. Es ist zu zeigen: $b = 1$ oder $c = 1$. Wegen $a \mid_M bc$ folgt nach Voraussetzung $a \mid_M b$ oder $a \mid_M c$. Ohne Einschränkung sei $a \mid_M b$. Dann ist $b = am$ mit $m \in M$. Also gilt $a = amc$, und durch Kürzen folgt $1 = mc$. Wegen $m, c \geq 1$ folgt $m = c = 1$.

(b) Es ist $36^2 = 2^4 \cdot 3^4 = 2^3 \cdot (2 \cdot 3^4) = 8 \cdot 162$ und es sind $8, 36, 162 \in M$. Wegen $M = \{1, 8, 15, \dots\}$ ist 8 offensichtlich *M*-irreduzibel. Es gilt $8 \mid_M 36 \cdot 36$, aber $8 \nmid_M 36$, also ist 8 nicht *M*-prim.

(Bemerkung: Ähnlich kann man auch zeigen, dass 36 bzw. 162 zwar *M*-irreduzibel, aber nicht *M*-prim sind)