Aufgabe 25. (a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Siebs des Eratosthenes alle Primzahlen ≤ 100.

(b) Schreiben Sie ein Computerprogramm, das mit Hilfe des Siebs des Eratosthenes alle Primzahlen $\leq 10\,000$ bestimmt. Wie viele sind das? (Die Wahl der Programmiersprache bleibt Ihnen überlassen; bringen Sie den von Ihnen geschriebenen Code mit.)

Aufgabe 26. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Jede Primzahl der Form $p = 3n + 1$ ($n \in \mathbb{N}_0$) hat auch die Form $p = 6m + 1$ mit geeignetem $m \in \mathbb{N}_0$.

(b) Die einzige Primzahl p der Form $p = n^2 - 4$ ist $p = 5$ ($n \in \mathbb{N}_0$).

(c) Die einzige Primzahl p für die auch $p + 2$ und $p + 4$ Primzahlen sind, ist $p = 3$.

Aufgabe 27. Sei $M = \{\, 7n + 1 : n \in \mathbb{N}_0 \,\}$ die Menge aus Aufgabe 12.

- Ein Element $a \in M \setminus \{1\}$ heißt *M-irreduzibel*, wenn für alle $b, c \in M$ gilt:

$$a = bc \quad \Rightarrow \quad b = 1 \text{ oder } c = 1.$$

- Ein Element $a \in M \setminus \{1\}$ heißt *M-prim*, wenn für alle $b, c \in M$ gilt:

$$a \mid_M bc \quad \Rightarrow \quad a \mid_M b \text{ oder } a \mid_M c.$$

Zeigen Sie:

(a) Jedes M-prime Element ist M-irreduzibel.

(b) Es gibt M-irreduzible Elemente die nicht M-prim sind (Hinweis: Betrachten Sie z.B. 36^2).

Aufgabe 28. (a) Sei p eine Primzahl und $a \in \mathbb{Z}$ mit $p \mid a^n$ ($n \geq 1$). Zeigen Sie $p^n \mid a^n$.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = p$ prim. Wie lauten die möglichen Werte von $\mathrm{ggT}(a^2, b^2)$, $\mathrm{ggT}(a^2, b)$ und $\mathrm{ggT}(a^3, b^2)$?