Aufgabe 13. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a,b) = 15$. Welche Werte kann $\mathrm{ggT}(a^3, b^4)$ annehmen?

Aufgabe 14. Man zeige für $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

(a) Aus $a \mid bc$ folgt $a \mid \mathrm{ggT}(a,b)\,\mathrm{ggT}(a,c)$.

(b) Aus $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$ und $c \mid (a+b)$ folgt $\mathrm{ggT}(a,c) = \mathrm{ggT}(b,c) = 1$.

Aufgabe 15. Seien $a \in \mathbb{N}$ mit $a \geq 2$ und $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $m \mid n \implies a^m - 1 \mid a^n - 1$. (*Hinweis:* $x^k - 1 = (x-1)(1 + x + \cdots + x^{k-1})$)

Aufgabe 16. Das Tripel $(2,3,7)$ hat die Eigenschaft, dass, wann immer man eine der drei Zahlen auswählt, diese Zahl die Summe aus 1 und dem Produkt der anderen beiden Zahlen teilt. Zeigen Sie, dass $(2,3,7)$ das einzige ganzzahlige Tripel (a,b,c) mit $1 < a \leq b \leq c$ ist, welches diese Eigenschaft besitzt.

Hinweis: Diese Aufgabe ist etwas fordernder. Sie können selbst ein wenig knobeln, oder sich an folgenden Zwischenschritten orientieren, die einen möglichen Lösungsweg skizzieren.

(i) a, b, c sind paarweise teilerfremd.

(ii) $bc \mid 1 + ab + ac$.

(iii) $ab + ac = bc - 1$.

(iv) $a \mid 2$ und deshalb $a = 2$.

(v) $2b = c - 1$.

(vi) $b = 3$.